Zu viel behauptet

Alle folgenden Aussagen sind falsch.
Finde jeweils ein Gegenbeispiel, mit dem sich die Aussage widerlegen lässt und versuche dann, die Behauptung sinnvoll zu berichtigen.
f sei stets eine beliebige reelle Funktion.

Beispiel: „Der Graph einer Polynomfunktion 3. Grades hat stets zwei Extrempunkte."
Falsch, denn z. B. der Graph der Funktion f: $x \to x^3$ hat keinen Extrempunkt.
Richtig z. B.: „Der Graph einer Polynomfunktion 3. Grades hat höchstens zwei Extrempunkte".

1. $P(x_0 \mid y_0)$ ist Hochpunkt des Graphen von f $\Rightarrow f''(x_0) < 0$.
2. f stetig $\Rightarrow$ f differenzierbar.
3. Gilt $\lim\limits_{x \to a+} f'(x) \to +\infty$, so ist f in a nicht definiert.
4. f ' hat Nullstelle in $x_0 \Rightarrow$ f hat bei x_0 ein Extremum.
5. $f'(x_0) = 0 > 0 \Rightarrow$ f streng monoton zunehmend.
6. f ' hat bei x_0 einen Vorzeichenwechsel $\Rightarrow f''(x_0) = 0$
7. $f''(x_0) = 0 \Leftrightarrow G_f$ hat bei x_0 einen Wendepunkt.
8. $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = a \Rightarrow f(1) = a.$
9. Fällt eine Funktion streng monoton in ganz $\mathbb{R}$, so wird sie irgendwann negativ.
10. t: $y = ax + b$ ist Wendetangente von f in $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = a$, $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$.
11. $f'(x) > 0 \Rightarrow$ f umkehrbar.
12. $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ mit $a < b \Rightarrow$ f hat im Intervall [a; b] mindestens eine Nullstelle.

Mögliche Gegenbeispiele:

1. $f(x) = -x^4$ für $x_0 = 0$
2. $f(x) = |x|$
3. $f(x) = \sqrt{x}$ für a = 0
4. $f(x) = x^3$ für $x_0 = 0$
5. $f(x) = -x^{-1}$
6. $f(x) = x^{-2}$ für $x_0 = 0$
7. $f(x) = x^4$ für $x_0 = 0$
8. $f(x) = \begin{cases} a & \text{für } x \neq 1 \\ a-1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$
9. $f(x) = 2^{-x}$
10. $f(x) = x^5$ für $x_0 = 0$
11. $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{für } -2 < x < 0 \\ x & \text{für } x > 0 \end{cases}$
12. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x \leq 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$ mit [a;b] = [−1;1]