

Das Lösen quadratischer Gleichungen in \mathbb{C}

Beispiel: $z^2 - 4z + 4iz = 7i$

Methode 1:

Durch die **Substitution $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$** erhalten wir nach einigen Rechenschritten

$$(x + iy)^2 - 4(x + iy) + 4i(x + iy) = 7i$$

$$x^2 + 2ixy - y^2 - 4x - 4iy + 4ix - 4y = 7i$$

$$x^2 - y^2 - 4x - 4y = -2ixy + 4iy - 4ix + 7i$$

durch Anwendung der dritten binomischen Formel und geeignetes richtiges Ausklammern

$$(x+y) \cdot (x-y) - 4(x+y) = i \cdot (-2xy + 4y - 4x + 7)$$

$$(x+y) \cdot (x - y - 4) = i \cdot (-2xy + 4y - 4x + 7)$$

eine Gleichung, die auf der linken Seite einen rein reellen und auf der rechten Seite einen rein imaginären Term besitzt.

Diese Gleichung ist nur dann erfüllt, wenn die Werte auf der linken und auf der rechten Seite jeweils 0 sind, wenn also das Gleichungssystem mit den zwei Gleichungen

$$(1) (x+y) \cdot (x - y - 4) = 0$$

$$(2) -2xy + 4y - 4x + 7 = 0$$

für die zwei reellen Unbekannten x und y gilt.

Aus Gleichung (1) folgt: (1a) $x = -y$ oder (1b) $x = y+4$

Setzt man zunächst wegen (1a) für x jeweils $-y$ in Gleichung (2) ein, erhält man

$$(2a) -2 \cdot (-y) \cdot y + 4y - 4 \cdot (-y) + 7 = 0$$

$$2y^2 + 8y + 7 = 0$$

Die Diskriminante dieser quadratischen Gleichung ist $8^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7 = 64 - 56 = 8 = (2\sqrt{2})^2 > 0$, weshalb die quadratische Gleichung (2a) die beiden Lösungen $y_{1/2} = -2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$ besitzt.

Zu diesen beiden Lösungen $y_{1/2}$ für y gehören wegen (1a) $x = -y$ die beiden Lösungen $x_{1/2} = 2 \mp \frac{1}{2}\sqrt{2}$ für x .

Durch Re-Substitution erhalten wir die komplexen Lösungen der ursprünglichen quadratischen Gleichung

$$z_1 = x_1 + iy_1 = 2 - \frac{1}{2}\sqrt{2} + i \cdot (-2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}) \text{ und } z_2 = x_2 + iy_2 = 2 + \frac{1}{2}\sqrt{2} + i \cdot (-2 - \frac{1}{2}\sqrt{2})$$

Wegen des Fundamentalsatzes der Algebra ist jetzt schon klar, dass es keine weiteren Lösungen gibt.

Zu Übungszwecken rechnen wir dennoch weiter, wohl wissend, dass man vorab nie weiß, ob (1a) oder (1b) zum Ziel führt.

Jetzt ist wegen (1b) für x der Term $y+4$ in Gleichung (2) einzusetzen:

$$(2b) -2 \cdot (y+4) \cdot y + 4y - 4 \cdot (y+4) + 7 = 0$$

$$-2y^2 - 8y + 4y - 4y - 16 + 7 = 0$$

$$-2y^2 - 8y - 9 = 0$$

$$2y^2 + 8y + 9 = 0$$

Die Diskriminante dieser quadratischen Gleichung ist $8^2 - 4 \cdot 2 \cdot 9 = 64 - 72 = -8 < 0$, weshalb die quadratische Gleichung (2b) keine Lösung besitzt.

Methode 2:

Wir lösen die ursprüngliche quadratische Gleichung $z^2 - 4z + 4iz = 7i$ nach Umstellung in die Normalform

$z^2 - (4 - 4i)z - 7i = 0$ ganz formal mit der Lösungsformel:

$$z_{1/2} = \frac{1}{2} \cdot [(4 - 4i) \pm \sqrt{[-(4 - 4i)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7i)}] = (2 - 2i) \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{-4i} = (2 - 2i) \pm \sqrt{-i}$$

Jetzt ist noch $\sqrt{-i}$ in die Form $a + ib$ zu bringen.

Dazu setzen wir $w^2 = -i = e^{-i\pi/2}$, was $w_{1/2} = \pm \sqrt{-i} = \pm e^{-i\pi/4} = \pm \cos(-\pi/4) \pm i \cdot \sin(-\pi/4) = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot (1 - i)$ ergibt, was zu den Lösungen

$z_{1/2} = (2 - 2i) \pm \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot (1 - i) = 2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{2} + i \cdot (-2 \mp \frac{1}{2}\sqrt{2})$, also schließlich zu

$z_1 = 2 - \frac{1}{2}\sqrt{2} + i \cdot (-2 + \frac{1}{2}\sqrt{2})$ und $z_2 = 2 + \frac{1}{2}\sqrt{2} + i \cdot (-2 - \frac{1}{2}\sqrt{2})$ führt.