Monotonie und Extrema

Monotonie

Definitionen

- Die Funktion f heißt *streng monoton zunehmend im Intervall* I bzw. *streng monoton abnehmend im Intervall* I der Definitionsmenge, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt:
  $f(x_1) < f(x_2)$ bzw. $f(x_1) > f(x_2)$.
- Die Funktion f heißt *monoton zunehmend im Intervall* I bzw. *monoton abnehmend im Intervall* I der Definitionsmenge, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt:
  $f(x_1) \leqq f(x_2)$ bzw. $f(x_1) \geqq f(x_2)$.

In diesen Definitionen ist die Bedingung „für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$", sehr wichtig. Zur

Feststellung der Monotonie muss die Funktion auf dem ganzen zu untersuchenden Intervall definiert sein, nicht nur in einzelnen Abschnitten. Die Bedingung des

Satz (Monotoniekriterium)

Die Funktion f sei im Intervall I differenzierbar.

Wenn für alle $x \in I$ gilt: $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0$,
dann ist f streng monoton zunehmend bzw. streng monoton abnehmend in I.

Monotoniekriteriums ist hinreichend, aber nicht notwendig.

Extremstellen, Extremwerte

Definitionen

- Der Funktionswert $f(x_0)$ heißt *lokales oder relatives Maximum von* f bzw. *lokales oder relatives Minimum von* f, wenn es in D_f eine Umgebung $U(x_0)$ gibt, so dass für alle $x \in U(x_0)$ gilt:
  $f(x) \leqq f(x_0)$ bzw. $f(x) \geqq f(x_0)$.
- Der Funktionswert $f(x_0)$ heißt *globales oder absolutes Maximum von* f bzw. *globales oder absolutes Minimum von* f, wenn für alle $x \in D_f$ gilt: $f(x) \leqq f(x_0)$ bzw. $f(x) \geqq f(x_0)$.
- Ist der Funktionswert $f(x_0)$ ein Maximum oder ein Minimum, dann heißt
  - der Wert $f(x_0)$ auch *Extremwert* oder *Extremum*
  - die Stelle x_0 *Extremstelle*
  - der Punkt $P_0\,(x_0\,|\,f(x_0))$ des Graphen von f *Extrempunkt*.
    Im Falle eines Maximums heißt P_0 *Hochpunkt*.
    Im Falle eines Minimums heißt P_0 *Tiefpunkt*.
- Ein Extremum an einer Randstelle von D_f nennt man *Randextremum*.

Eine *Umgebung* $U(x_0)$ von x_0 ist ein (evt. sehr kleines) offenes Intervall, das x_0 enthält.

Sätze Die Funktion f sei auf dem offenen Intervall I differenzierbar und x_0 sei eine innere Stelle von I.

- Wenn f an der Stelle x_0 einen Extremwert hat, dann ist $f'(x_0) = 0$.
- Wenn $f'(x_0) = 0$, dann hat G_f bei x_0 eine waagrechte Tangente.
- Wenn $f'(x_0) = 0$ und wenn f' bei x_0 einen VZW von $+$ nach $-$ hat, dann hat die Funktion f bei x_0 ein lokales Maximum und G_f einen Hochpunkt.
- Wenn $f'(x_0) = 0$ und wenn f' bei x_0 einen VZW von $-$ nach $+$ hat, dann hat die Funktion f bei x_0 ein lokales Minimum und G_f einen Tiefpunkt.
- Wenn $f'(x_0) = 0$ und wenn f' bei x_0 keinen VZW hat, dann hat die Funktion f bei x_0 kein lokales Extremum, sondern G_f einen *Terrassenpunkt*.

Die Bedingung „$f'(x_0) = 0$" ist notwendig, aber nicht hinreichend für eine Extremstelle.

Die Bedingung „$f'(x_0) = 0$ und f' hat VZW" ist hinreichend für eine Extremstelle.