Auflösung der Abzahlungsgleichung nach jeder der vier Variablen

Gekürzte Fassung des ETH-Leitprogramms von Jean Paul David und Moritz Adelmeyer – Teil 1

Die Abzahlungsgleichung lautet in allgemeiner Form $q^n \cdot K - q^{n-1} \cdot R - q^{n-2} \cdot R - \ldots\ldots - q^3 \cdot R - q^2 \cdot R - q \cdot R - R = 0$.
In dieser Gleichung kommen alle vier Variablen vor: Kreditbetrag K, Monatsrate R, Zinsfaktor q und Laufzeit n.
Wir werden nun jeweils für drei der vier Variablen Zahlenwerte vorgeben und versuchen, die Gleichung nach der vierten, der **Unbekannten**, aufzulösen.

Die Unbekannte ist K

Sinnvolle Werte: $R = 500$, $q = 1.02$, $n = 4$.

Die Gleichung lautet dann $1.02^4 \cdot K - 1.02^3 \cdot 500 - 1.02^2 \cdot 500 - 1.02 \cdot 500 - 500 = 0$

Zeige, dass K = 1903.86

Die Unbekannte ist R

Sinnvolle Werte: $K = 2000$, $q = 1.01$ und $n = 4$.

AUFGABE 20: Löse die Gleichung nach R auf.

Die Unbekannte ist q

Sinnvolle Werte: $K = 2000$, $R = 550$ und noch einmal $n = 4$.

Die Gleichung lautet jetzt $q^4 \cdot 2'000 - q^3 \cdot 550 - q^2 \cdot 550 - q \cdot 550 - 550 = 0$.

Wir versuchen, zu vereinfachen:

$$q^4 \cdot 2'000 - (q^3 + q^2 + q + 1) \cdot 550 = 0$$

$$q^4 \cdot 2'000 = (q^3 + q^2 + q + 1) \cdot 550$$

$$q^4 = (q^3 + q^2 + q + 1) \cdot 0.275$$

$$\frac{q^4}{q^3 + q^2 + q + 1} = 0.275$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Was wir auch tun: Nie erreichen wir die einfache Form der ersten beiden Fälle, weil die **Gleichung nichtlinear** ist.

Die Unbekannte ist n

Sinnvolle Werte: $K = 4000$, $R = 300$ und $q = 1.02$. Hier stellt sich schon beim Aufstellen der Gleichung ein Problem ein: Wir wissen ja nicht einmal, wie viele Summanden unsere Gleichung hat! Sie lautet:

$$1.02^n \cdot 4'000 - 1.02^{n-1} \cdot 300 - \ldots - 1.02^3 \cdot 300 - 1.02^2 \cdot 300 - 1.02 \cdot 300 - 300 = 0 .$$

Die Chancen, diese **nichtlineare Gleichung** allein durch Umformen lösen zu können, stehen offensichtlich schlecht. Später werden wir sehen, dass man die Gleichung durch geschicktes Umformen zwar ein wenig vereinfachen kann. Doch bei aller Geschicklichkeit, die einfache Form der ersten beiden Fälle erreicht man auch hier nicht.

Lösung nichtlinearer Gleichungen

Es gibt verschiedene Wege, nichtlineare Gleichungen zu lösen.

Einer davon ist die **Intervallschachtelung** durch **planmässiges Probieren** .

SPIEL-AUFTRAG:

Suche Dir eine Spielpartnerin oder einen Spielpartner. Spielt ein paarmal Hi Lo zusammen. Das geht so:

Dein(e) Partner(in) denkt sich eine geheime Zahl aus. Du versuchst, die geheime Zahl zu erraten. Nach jedem Rateversuch meldet Dein(e) Partner(in): «Zu hoch!» Oder: «Zu tief!» Oder dann eben: «Richtig!».

Du wirst sehen: Wenn Du planmässig rätst, kannst Du die geheime Zahl mit wenigen Versuchen entdecken.

Natürlich vereinbart ihr vor jedem Spiel, in welchem Bereich die geheime Zahl liegen darf.
Zum Beispiel: «Von 0 bis 100, nur ganze Zahlen.» Oder: «Von 0 bis 5, zwei Stellen nach dem Komma.»

Planmässiges Probieren führt Dich Schritt für Schritt immer genauer an die Lösung heran. In praktischen Anwendungen reicht es üblicherweise aus, die Lösung auf einige wenige Nachkommastellen genau zu kennen.

Bevor Frau X mit dem Probieren beginnt, versucht sie aber noch ihre Abzahlungsgleichung zu vereinfachen:

Sie kann den gemeinsamen Faktor 870 ausklammern: $q^6 \cdot 5'000 - (q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1) \cdot 870 = 0$

Und dann die Klammer stark vereinfachen! Es gilt nämlich: $q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1 = \dfrac{q^6 - 1}{q - 1}$

Um das einzusehen, brauchst Du nur nachzurechnen, dass $(q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1) \cdot (q - 1) = q^6 - 1$ gilt.

Diese Überlegung kann man für jede beliebige Anzahl Summanden durchführen. So gilt zum Beispiel auch

$$q^{700} + q^{699} + q^{698} + \;........\; + q^3 + q^2 + q + 1 = \frac{q^{701} - 1}{q - 1}.$$

Doch nun zurück zur Abzahlungsgleichung von Frau X. Mit der vereinfachten Klammer lautet sie:

$$q^6 \cdot 5'000 - \frac{q^6 - 1}{q - 1} \cdot 870 = 0$$

Wie praktisch! Die Hochzahlen stimmen beide gerade mit der Laufzeit überein!

AUFGABE 25: Vervollständige den Probierplan für die fünfte Nachkommastelle von q.
Wie viel Prozent beträgt der Monatszinssatz, gerundet auf zwei Nachkommastellen?

Probierwert für q	$q^6 \cdot 5'000 - \dfrac{q^6 - 1}{q - 1} \cdot 870$ (Linke Seite der vereinfachten Abzahlungsgleichung)	Vorzeichen	Der Probierwert für q ist ...
1.01240	– 0.80	negativ	zu tief
1.01241	....	....	zu ....
......	....	....	....

Abzahlungsgleichung (bei gleichmässiger Rückzahlung und festem Zinssatz)		
$q^n \cdot K - \dfrac{q^n - 1}{q - 1} \cdot R = 0$	K	Kreditbetrag
	R	Monatsrate
	q	Monatszinsfaktor = 1+ Monatszinssatz
	n	Laufzeit in Monaten

AUFGABE 26: Die Abzahlungsgleichung ist jetzt viel einfacher.
Aber Sie hat einen «Schönheitsfehler». Der Wert q = 1 kann nicht mehr eingesetzt werden.

a) Was passiert nämlich, wenn man für q den Wert 1 einsetzt?

b) Warum ist es aber – aus praktischer Sicht – nicht weiter schlimm, dass q = 1 nicht eingesetzt werden darf?

Lernkontrolle

AUFGABE 28

Im Dezember 1991 sagten die Stimmbürgerinnen und Stimmbürger des Kantons Zürich Ja zu einem neuen Kleinkreditgesetz. Im November 1993 trat es in Kraft. Die Verordnung zu diesem Gesetz schreibt vor, dass alle Kreditberechnungen mit genau der Abzahlungsgleichung vorzunehmen seien, welche wir aufgestellt und gelöst haben. Vor 1993 rechneten die meisten Banken bei Kleinkrediten mit der Gleichung

$$K + \frac{n+1}{2} \cdot \frac{p}{12} \cdot K - n \cdot R = 0$$

K Kreditbetrag
R Monatsrate
p Jahreszinssatz
n Laufzeit in Monaten

Ist diese Gleichung linear oder nichtlinear, wenn

a) der Jahreszinssatz p die Unbekannte ist?

b) die Laufzeit n die Unbekannte ist?

Begründe Deine Antworten durch passende Umformungen.
Wähle dazu selbst sinnvolle Zahlen.

AUFGABE 29

Die Abzahlungsgleichung $q^n \cdot K - \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot R = 0$ ist nichtlinear, wenn die Laufzeit n die Unbekannte ist.

a) Setze $K = 5000$, $R = 315$ und $q = 1.015$ in die Gleichung ein, und vereinfache diese soweit wie möglich.

- Wir möchten, dass Du $1.3125 - 1.015^n = 0$ erhältst.
- Gib alle Umformungsschritte an.

b) Löse nun die Gleichung $1.3125 - 1.015^n = 0$ mit planmäßigem Probieren.
(Achtung: Die Laufzeit n kann nur ganzzahlige Werte annehmen.
Nachkommastellen wie bei K, R und q machen für n keinen Sinn.)

- Suche selber einen geeigneten Startwert für n.
- Wähle selber die Schrittweite für n.
- Rechne solange, bis Du die Vorkommastellen von n kennst.
- Gib die Restschuld am Ende der Laufzeit an.
  Sie wird vom Kreditnehmer zusammen mit der letzten Rate beglichen.

AUFGABE 30

Ein Kredit von 2000 € soll in 2 Raten zu je 1050 € im Laufe von 4 Monaten abgezahlt werden. Die Ratenzahlungen erfolgen im 2. und 4. Monat.

Die Abzahlungsgleichung zu einem solchen Kreditangebot lautet

$$q^4 \cdot K - q^2 \cdot R - R = 0$$

K Kreditbetrag
R Rate
q Monatszinsfaktor

Diese Gleichung ist nichtlinear, wenn q die Unbekannte ist. Ermitteln Sie q mit planmässigem Probieren.

- Suche selber einen geeigneten Startwert für q.
- Wähle selber die Schrittweiten für q.
- Rechne solange, bis Du die dritte Nachkommastelle von q kennst.