

Abzahlungsplan und Abzahlungsgleichung

Gekürzte Fassung des ETH-Leitprogramms von Jean Paul David und Moritz Adelmeyer – Teil 2

Frau X hat ein Angebot der Bank: Sie würde 5000 Euro erhalten und müsste dafür 6 Monatsraten zu 870 Euro, also insgesamt 5220 Euro zurückzahlen.

Frau X will das Kreditangebot genauer unter die Lupe nehmen. Dazu stellt sie einen **Abzahlungsplan** auf. Das ist eine Tabelle, in der für jeden Monat der Schuldenstand, der Zins und die Rückzahlung übersichtlich zusammengestellt sind. Der Plan beginnt wie folgt:

Zeitraum	Schuldenstand in €	Zins in €	Rückzahlung in €
1. Monat	5000.00	???	870.00
2. Monat	870.00
3. Monat	870.00
.....

Um den Zins berechnen zu können, müsste Frau X wissen, mit welchem Zinssatz die Bank rechnet.

Frau X bleibt schon bei der ersten Zeile stecken. Sie kann den Zins nicht ausrechnen, weil sie nicht weiß, mit welchem Zinssatz die Bank rechnet. Kein Wunder: Gerade *das* möchte sie ja herausfinden.

So beschließt sie denn, vorerst nur abzuklären, ob die Bank innerhalb der gesetzlichen Vorschriften bleibt. Dazu verwendet sie für ihre Tabelle einfach den gesetzlich festgelegten Höchstzinssatz.

Wenn die Tabelle fertig ist, wird sie dann sehen können, ob das Bankangebot diesem entspricht oder nicht.

Der gesetzliche Jahreshöchstzinssatz beträgt (in den meisten Kantonen der Schweiz) 18%.

Dem entspricht ein Monatszins von 1.39% (vgl. Aufgabe 7).

AUFGABE 8:

a) Studiere den Beginn des Abzahlungsplanes unten und fülle die noch leeren restlichen Felder aus.

b) Wenn Du richtig gerechnet hast, bleibt am Schluss der Tabelle eine Restschuld übrig.

Überlege: Zu welchem Schluss kommt Frau X bezüglich des Zinssatzes: Ist das Angebot der Bank nun korrekt oder zu teuer, gemessen an den gesetzlichen Bestimmungen?

Am 1. Tag des 1. Monats zahlt die Bank Frau X den vollen Kreditbetrag von 5000 Euro aus. Der Schuldenstand bleibt während des ganzen 1. Monats gleich.

Am letzten Tag des 1. Monats wird der Zins für den abgelaufenen Monat berechnet:

$$\text{Schuldenstand 1. Monat} \times \text{Zinssatz} = \text{Zins 1. Monat}$$

$$5000.00 \times 0.0139 = 69.50$$

Zeitraum	Schuldenstand in €	Zins in €	Rückzahlung in €
1. Monat	5000.00	69.50	870.00
2. Monat	4199.50	870.00
3. Monat	870.00
4. Monat	870.00
5. Monat	870.00
6. Monat	870.00
Restschuld:

Am letzten Tag eines jeden Monats zahlt Frau X der Bank eine Rate zurück.

Der neue Schuldenstand für den 2. Monat wird errechnet:

$$\text{Schuldenstand 1. Monat} + \text{Zins 1. Monat} - \text{Rückzahlung 1. Monat} = \text{Schuldenstand 2. Monat}$$

$$5000.00 + 69.50 - 870.00 = 4199.50$$

AUFGABE 9: Das Kreditangebot von Frau X hat zwei Eigenschaften, die typisch sind für Kleinkredite: gleichbleibende Monatsraten und einen gleichbleibenden Monatszinssatz. Das ist nicht bei allen Krediten so. Diese Aufgabe zeigt Ihnen zwei andere Kreditformen.

- a) Herr Jacob kaufte 1985 eine Wohnung. Dazu nahm er eine Hypothek von 180000 € auf. Er zahlte pro Jahr 15000 € zurück. Der Zinssatz änderte von Jahr zu Jahr: 1985: 5.25% p.a., 1986: 5.75% p.a., 1987: 4.75% p.a. Stelle für die Jahre 1985, 1986 und 1987 einen Abzahlungsplan auf.
- b) Dem unten unvollständig abgedruckten Abzahlungsplan liegt ein gleichbleibender Monatszinssatz zu Grunde. Die Rückzahlungsbeträge dagegen ändern von Monat zu Monat. Suchen Sie die fehlenden Beträge (am besten in der Reihenfolge der angegebenen Nummern).

Zeitraum	Schuldenstand in €	Zins in €	Rückzahlung in €
Okt. 94	⑤.....	⑥.....	1250.00
Nov. 94	③.....	729.10	④.....
Dez. 94	6553.84	①.....	1550.00
Jan. 95	5626.46	② Monatszinssatz =	

Wie hoch ist der Zinssatz tatsächlich?

Welcher Zinssatz steckt nun tatsächlich hinter dem Angebot, das Frau X von der Bank erhalten hat? Gibt es vielleicht eine Gleichung, aus der sich dieser Zinssatz ermitteln lässt? Welches sind überhaupt die rechnerischen Gesetzmäßigkeiten des Abzahlungsgeschäftes? Solche Gesetzmäßigkeiten findet man leichter heraus, wenn man mit Variablen statt mit Zahlen rechnet. Deshalb wiederholen wir jetzt die Rechnung aus Abschnitt 1.4 mit Variablen anstelle der konkreten Zahlenwerte.

Die Kreditvariablen

Frau X führt folgende vier Variablen ein:

Variable	Buchstabe
Kreditbetrag in €	K
Monatsrate in €	R
Monatszinssatz	p
Zinsfaktor	q

Wie früher gilt wiederum
 $q = 1 + p$

Der Schuldenstand im 2. Monat

Frau X stellt die erste Zeile des Abzahlungsplanes auf und rechnet den Schuldenstand für den 2. Monat aus:

Zeitraum	Schuldenstand in €	Zins in €	Rückzahlung in €
1. Monat	K	p · K	R
2. Monat	q · K - R		

Der neue Schuldenstand für den 2. Monat wird errechnet:

$$\text{Schuldenstand 1. Monat} + \text{Zins 1. Monat} - \text{Rückzahlung 1. Monat} = \text{Schuldenstand 2. Monat}$$

$$K + p \cdot K - R = q \cdot K - R$$

Hier kann man K ausklammern:
 $K + p \cdot K = (1 + p) \cdot K$

Die Klammer (1 + p) ist gerade der Zinsfaktor q

Frau X merkt, dass sie die dritte Spalte im Abzahlungsplan gar nicht braucht. Wenn sie nämlich den Zinsfaktor benützt, kann sie den neuen Schuldenstand immer direkt aus dem alten Schuldenstand und der Rückzahlung berechnen, ohne den «Umweg» über den Zins:

Zeitraum	Schuldenstand in €	Rückzahlung in €
1. Monat	K	R
2. Monat	$q \cdot K - R$	

Der Schuldenstand im 3. Monat

Frau X geht einen Schritt weiter und rechnet den Schuldenstand für den 3. Monat aus. Dabei geht sie jetzt immer genau gleich vor:

$$\boxed{\text{neuer Schuldenstand}} = \boxed{\text{Zinsfaktor}} \times \boxed{\text{alter Schuldenstand}} - \boxed{\text{Rückzahlung}}$$

Zeitraum	Schuldenstand in €	Rückzahlung in €
1. Monat	K	R
2. Monat	$q \cdot K - R$	R
3. Monat	$q^2 \cdot K - q \cdot R - R$	

alter Schuldenstand

Frau X erhält zunächst $q \cdot (q \cdot K - R) - R$.
 Sie multipliziert das aus und erhält $q^2 \cdot K - q \cdot R - R$.

Der Schuldenstand im 4. Monat

Zeitraum	Schuldenstand in €	Rückzahlung in €
1. Monat	K	R
2. Monat	$q \cdot K - R$	R
3. Monat	$q^2 \cdot K - q \cdot R - R$	R
4. Monat	$q^3 \cdot K - q^2 \cdot R - q \cdot R - R$	

alter Schuldenstand

Frau X erhält zunächst $q \cdot (q^2 \cdot K - q \cdot R - R) - R$.
 Sie multipliziert das aus und erhält $q^3 \cdot K - q^2 \cdot R - q \cdot R - R$.

- AUFGABE 10:**
- Fahre mit dem Abzahlungsplan weiter. Wie lautet der Schuldenstand im 5. Monat und im 6. Monat?
 - Welchen Ausdruck erhältst Du für die Restschuld nach 6 Monaten? Überprüfe Deine Formel mit den konkreten Zahlenwerten aus Abschnitt 1.4.

Zeitraum	Schuldenstand in €	Rückzahlung in €
1. Monat	K	R
2. Monat	$q \cdot K - R$	R
3. Monat	$q^2 \cdot K - q \cdot R - R$	R
4. Monat	$q^3 \cdot K - q^2 \cdot R - q \cdot R - R$
5. Monat
6. Monat
Restschuld	

Die Abzahlungsgleichung

Nach Ablauf der 6 Monate hat Frau X ihren Kredit vollständig zurückgezahlt. Ihre Restschuld ist dann 0:

$$q^6 \cdot K - q^5 \cdot R - q^4 \cdot R - q^3 \cdot R - q^2 \cdot R - q \cdot R - R = 0$$

Man erhält so eine **Abzahlungsgleichung**, die den Zusammenhang zwischen den Kreditvariablen angibt.

Mit Hilfe ihrer Abzahlungsgleichung wird Frau X die Frage nach der Höhe des Zinssatzes beantworten können. Sie muss dazu die Gleichung nach q auflösen. Das wird in Kapitel 2 geschehen, doch wollen wir die Gleichung zuvor noch verallgemeinern.

Die Abzahlungsgleichung für eine beliebige Laufzeit

Unter der **Laufzeit** versteht man die Anzahl Zinsperioden bis zur vollständigen Abzahlung des Kredites. Beim Kreditangebot von Frau X beträgt sie 6 Monate. Wie sieht die Abzahlungsgleichung aus, wenn die Laufzeit n Monate beträgt?

AUFGABE 11: «Erfinde» eine Verallgemeinerung der obigen Gleichung für eine beliebige Laufzeit n .



Abzahlungsgleichung (bei gleichmäßiger Rückzahlung und festem Zinssatz)

Für einen **Kredit K** , welcher durch lauter gleich hohe **Raten R** zurückgezahlt wird und bei welchem der **Zinssatz p** während der ganzen **Laufzeit n** gleich bleibt, lautet die Abzahlungsgleichung

$$q^n \cdot K - q^{n-1} \cdot R - q^{n-2} \cdot R - \dots - q^3 \cdot R - q^2 \cdot R - q \cdot R - R = 0$$

Dabei ist $q = 1 + p$ der Zinsfaktor.

Diese Abzahlungsgleichung zeigt den Zusammenhang zwischen den vier Kreditvariablen Kreditbetrag K , Rückzahlrate R , Laufzeit n und Zinsfaktor q . Sind drei der Variablen bekannt, so lässt sich die vierte aus der Abzahlungsgleichung ermitteln. Wie, wird Ihnen das Kapitel 2 «Frau X löst die Gleichung» zeigen.

AUFGABE 12: Frau X zog einmal flüchtig in Betracht, sich für die Rückzahlung ihres Kredites ein ganzes statt nur ein halbes Jahr Zeit zu lassen. Wie hätte ihre Abzahlungsgleichung für diesen Fall gelautet?

Die Abzahlungsgleichung bei ungleichmäßiger Rückzahlung oder bei veränderlichem Zinssatz

Die Abzahlungsgleichung in der obenstehenden Informationsbox geht von den Voraussetzungen aus, dass der Kredit durch lauter gleich hohe Raten zurückgezahlt wird, und dass der Zinssatz während der ganzen Laufzeit gleich bleibt. Fälle, in denen diese Voraussetzungen nicht erfüllt sind, haben Sie schon in der Aufgabe 9 gesehen. Die nächsten beiden Aufgaben behandeln noch einmal zwei solche Beispiele. Diesmal geht es um das Aufstellen von Abzahlungsgleichungen.

AUFGABE 13: Frau X erwog einmal die Möglichkeit, die Rückzahlung ihres Kredites auf ein ganzes Jahr auszudehnen. Dabei stand allerdings fest, dass sie in den Monaten ihrer Abwesenheit keine Zahlungen würde leisten können.

Sie gedachte mit der Bank eine Rückzahlung in 8 gleichen Raten zu vereinbaren, nämlich in den ersten 6 und den letzten 2 Monaten der zwölfmonatigen Laufzeit. Wie lautet die Abzahlungsgleichung?

AUFGABE 14: Herr und Frau Lorenz kaufen Möbel im Wert von 2000 € auf Pump. Sie zahlen die Möbel im Laufe von drei Monaten mit drei unterschiedlich hohen Raten zurück. Die 1. Monatsrate beträgt 800 €, die 2. Monatsrate 700 €. Der Monatszinssatz beträgt 1.45%.

- Stelle den Abzahlungsplan zum Kreditangebot von Herrn und Frau Lorenz auf. Wie hoch ist die 3. Monatsrate?
- Führe die Variablen K Kreditbetrag, q Monatszinsfaktor, R_1 1. Monatsrate, R_2 2. Monatsrate, R_3 3. Monatsrate ein. Rechne den Abzahlungsplan mit den fünf Variablen anstelle der konkreten Zahlenwerte durch.
- Wie lautet die Abzahlungsgleichung zum Kreditangebot von Herrn und Frau Lorenz? Berechne aus der Abzahlungsgleichung die 3. Monatsrate. Stimmt das Resultat mit a) überein?



Abzahlungsplan und Abzahlungsgleichung

- Zu jedem Abzahlungsgeschäft lässt sich ein **Abzahlungsplan** aufstellen.
- Er enthält für jeden Zeitraum den **Schuldenstand**, ausgedrückt in den **Kreditvariablen** (Kreditbetrag, Rückzahlungsraten, Zinssätze).
- Der Schuldenstand am Ende der Laufzeit heißt **Restschuld**.
- Ein Kredit ist vollständig abgezahlt, wenn die Restschuld 0 ist.
- Setzt man den Ausdruck für die Restschuld gleich 0, erhält man die **Abzahlungsgleichung**.

Lernkontrolle

- AUFGABE 15 Die Schweizerische Eidgenossenschaft steckt in Schulden!
Im Jahre 1995 betrug die Staatsverschuldung pro Kopf der Bevölkerung 17500 Euro.
- a) Wie viel Zins musste der Staat für das Jahr 1995 pro Kopf der Bevölkerung zahlen bei einem Zinssatz von 6.5%?
 - b) Wie hoch wird die Verschuldung pro Kopf der Bevölkerung im Jahre 2000 sein, wenn der Staat weder weitere Kredite aufnimmt, noch irgendwelche Rückzahlungen leisten kann?
Gehe davon aus, dass der Jahreszinssatz zwischen 1995 und 2000 stets 6.5% beträgt und die Bevölkerungszahl etwa gleich bleibt.
 - c) Tatsächlich muss die Schweiz jährlich neue Kredite aufnehmen, um die laufenden Ausgaben zu decken. Wie hoch wird die Verschuldung pro Kopf der Bevölkerung im Jahre 2000 sein, wenn der Staat pro Jahr und pro Kopf der Bevölkerung weitere Kredite im Umfang von 2500 Euro aufnimmt und keine Rückzahlungen leistet?
Gehe davon aus, dass der Jahreszinssatz zwischen 1995 und 2000 stets 6.5% beträgt und die Bevölkerungszahl etwa gleich bleibt.
-
- AUFGABE 16 Ein Kredit von 5000 € soll nach 2 Jahren durch eine einmalige Zahlung von 6469.50 € getilgt werden.
- a) Wie hoch ist der Jahreszinssatz p. a.?
 - b) Weise nach, dass der Monatszinssatz rund 1.08 % p. m. beträgt.
-
- AUFGABE 17 Herr A hat sich von Herrn B 5000 € zu einem Zinssatz 16% p. a. geborgt und vereinbart, den Betrag inkl. Zinsen nach einem Jahr zurückzuzahlen.
Herr A ist aber bereits nach einem halben Jahr in der Lage, den Kredit zurückzuzahlen.
- Herr B: «Das kommt mir gelegen. Zahlen Sie mir die 5000 € plus die Hälfte des Jahreszinses, also plus 400 €»
- Herr A: «Sie Wucherer! Sie wollen aus der vorzeitigen Rückzahlung noch zusätzlichen Profit schlagen!»
- Herr B: «Wieso ist das Wucher? Und welcher Rückzahlungsbetrag ist denn korrekt?»
- Formuliere für Herrn A eine Antwort auf die Fragen von Herrn B.
-
- AUFGABE 18 Herr und Frau Lauscher nehmen für den Kauf einer Stereo-Anlage einen Kredit von 6000 € auf. Der Kredit soll im Laufe von 3 Jahren durch 3 gleich hohe Raten zurückgezahlt werden. Der Jahreszinssatz beträgt im 1. Jahr 13.5%, im 2. Jahr 12.5% und im 3. Jahr 11.5%.
- Zeige mit Hilfe eines Abzahlungsplanes, dass Herr und Frau Lauscher pro Jahr 2535.30 € zurückzahlen müssen.
-
- AUFGABE 19
- a) Erläutere den Begriff «Abzahlungsgleichung» am Beispiel eines Kredites, der im Laufe von drei Monaten zurückbezahlt wird, wobei der Zinssatz in jedem Monat unterschiedlich hoch ist (vgl. Aufgabe 18).
 - b) Stelle die Abzahlungsgleichung zu einem derartigen Kredit auf.
Überprüfe Deine Gleichung anhand der Zahlenwerte von Aufgabe 18.