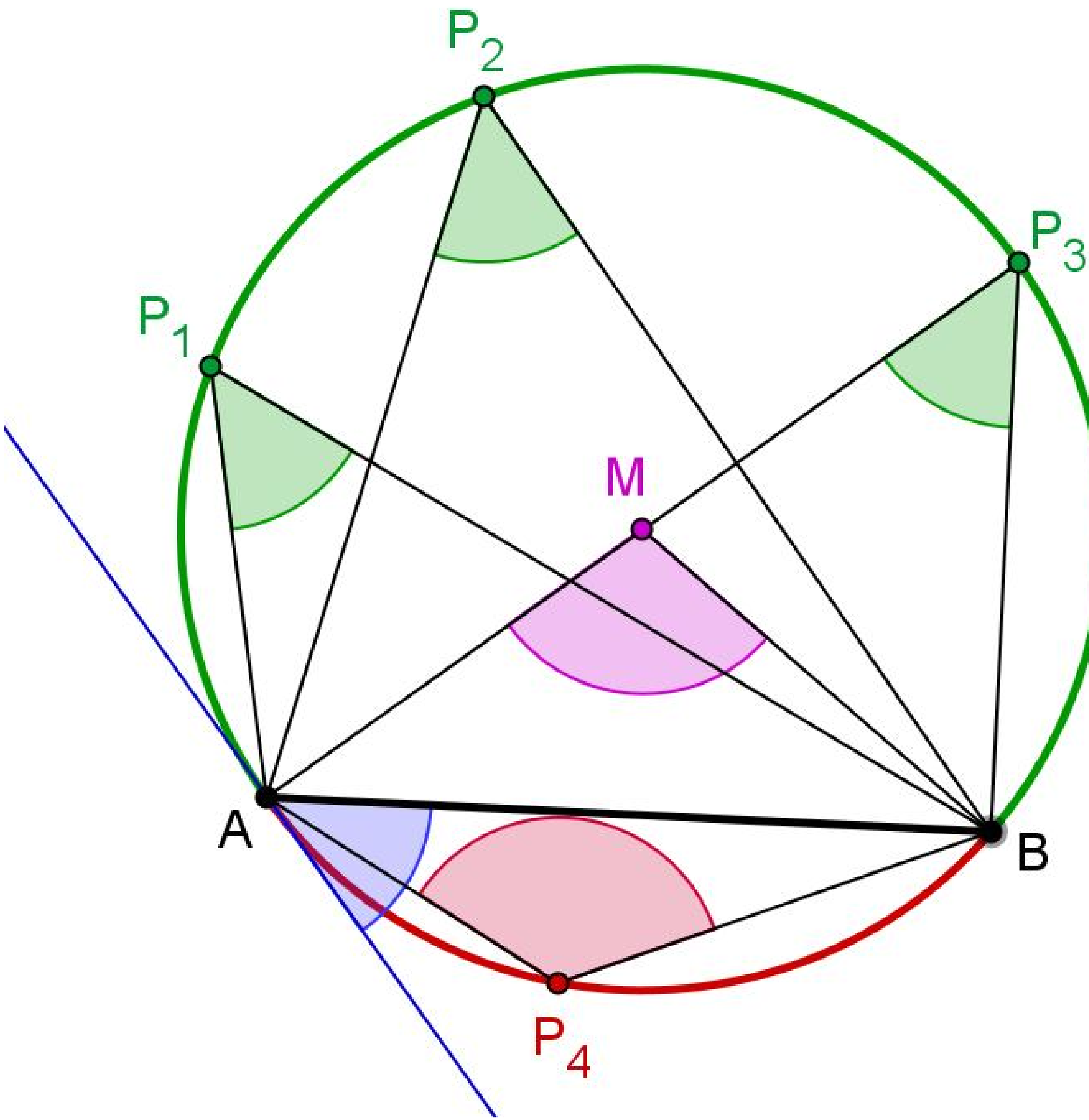
Merkwürdige Punkte, Geraden, Kreise und Vielecke im, am und um das Dreieck herum

aufgezeichnet von
Walter Schellenberger

Hilfsmittel: Umfangs- Mittelpunkts- und Sehnen-Tangenten-Winkel



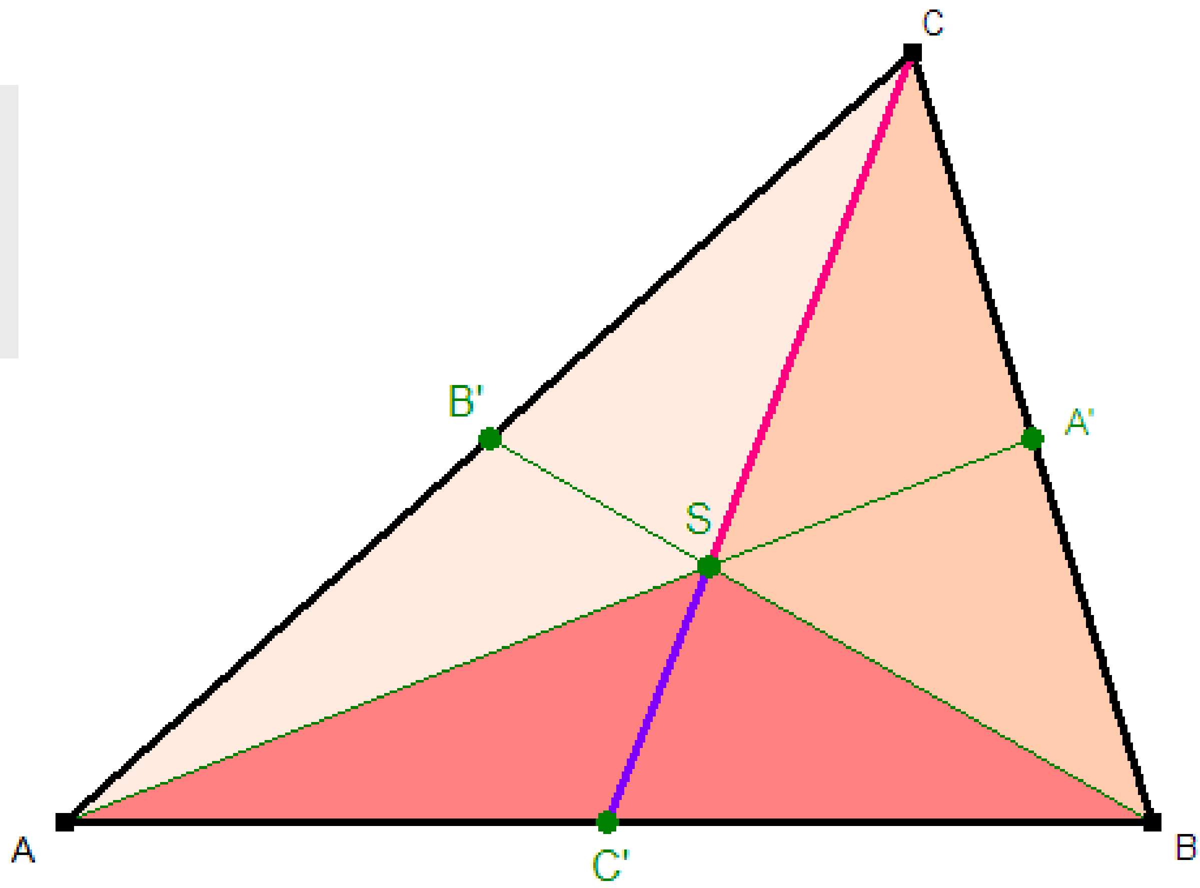
Altbekannte

Ecktransversalen
und
Mittentransversalen

des Dreiecks

Seitenhalbierende des Dreiecks und Schwerpunkt

Konfiguration:
- Dreieck ABC mit den
- Seitenhalbierenden (Ecktransversalen)

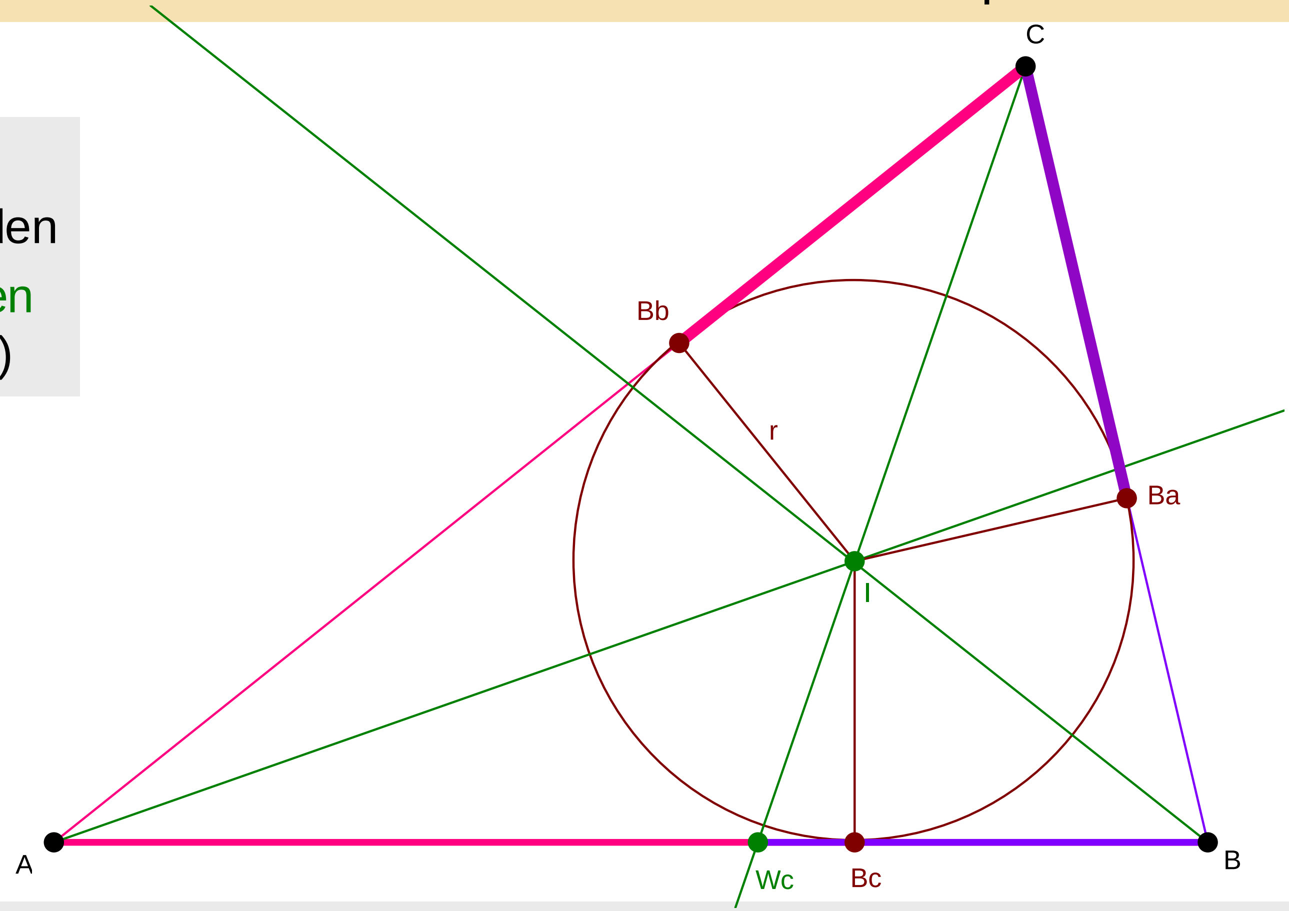


- Die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt S.
- S ist der Schwerpunkt des Dreiecks.
- S teilt jede Seitenhalbierende im Verhältnis 2 : 1 .
- Die Seitenhalbierenden zerlegen das Dreieck ABC in sechs Teildreiecke mit gleich großem Flächeninhalt.

Winkelhalbierende des Dreiecks und Inkreismittelpunkt

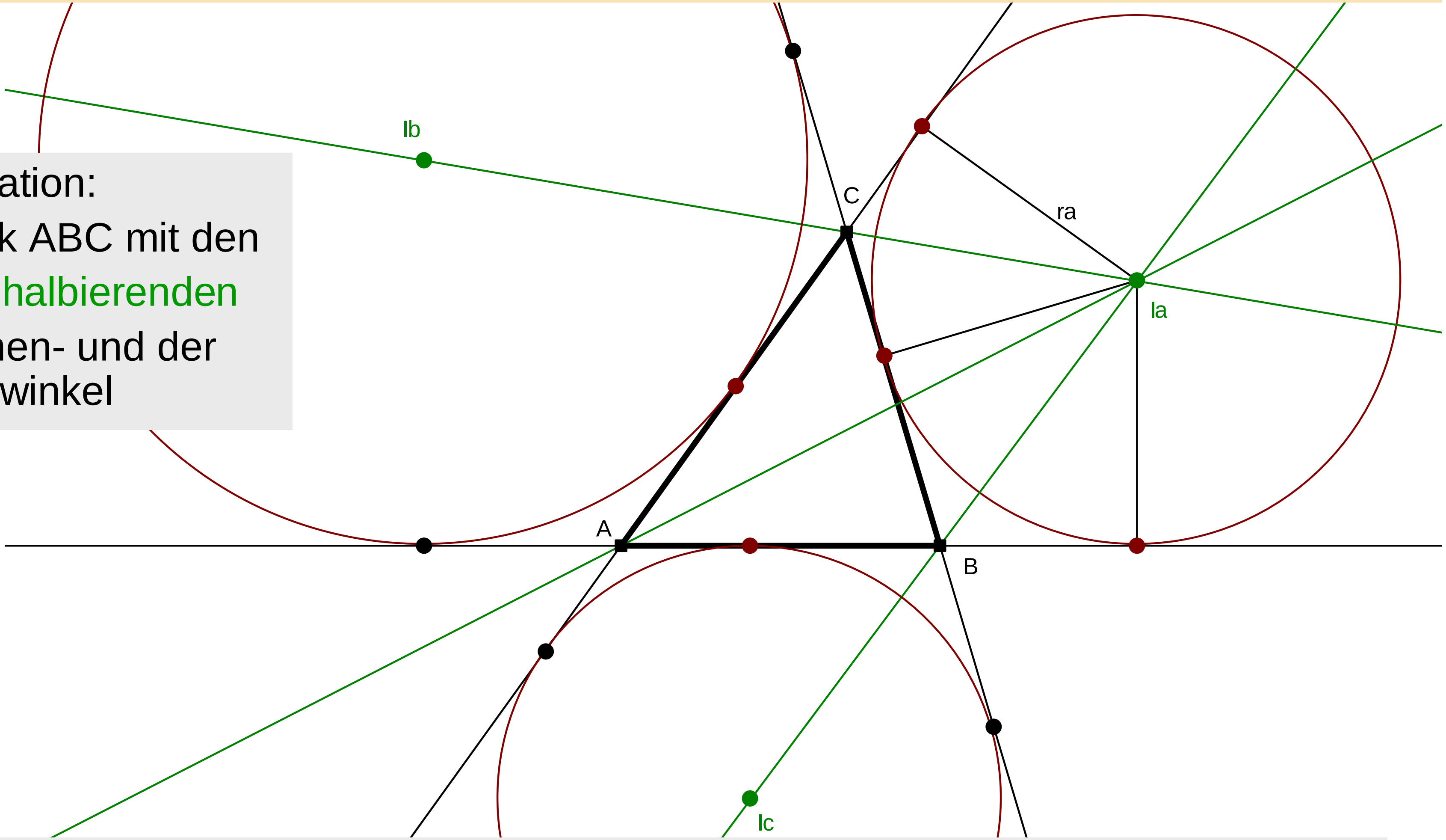
Konfiguration:

- Dreieck ABC mit den
- Winkelhalbierenden (Ecktransversalen)



- Die drei Winkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt I.
- I ist der Mittelpunkt des Inkreises des Dreiecks.
- Jede Winkelhalbierende teilt die dem Winkel gegenüberliegende Seite im Verhältnis der den Winkel einschließenden Seiten.
- Die von einem Eckpunkt zu den Berührpunkten des Inkreises reichenden Tangentenabschnitte sind gleich lang.

Winkelhalbierende des Dreiecks und Ankreismittelpunkte



Konfiguration:

- Dreieck ABC mit den
- Winkelhalbierenden der Innen- und der Außenwinkel

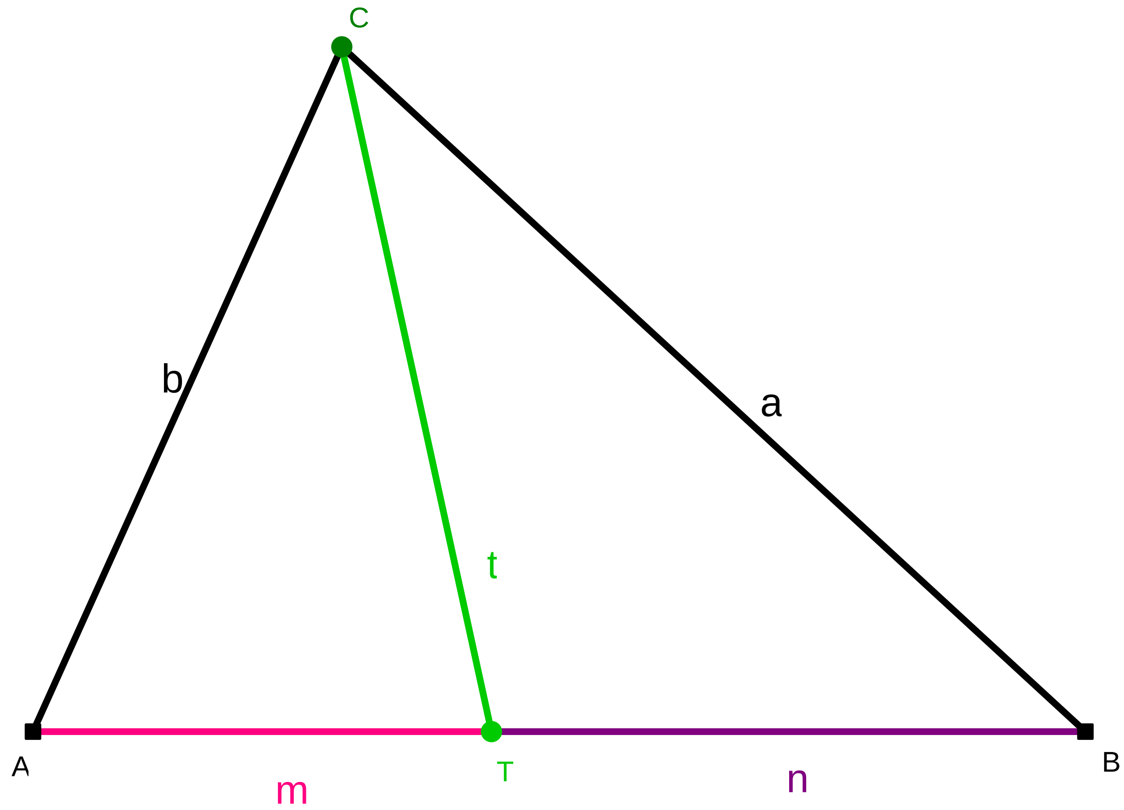
- Die Winkelhalbierenden zweier Außenwinkel eines Dreiecks und die Winkelhalbierende des dritten Winkels schneiden sich je in einem der Punkte I_a, I_b, I_c.
- I_a, I_b, I_c sind die Mittelpunkte der Ankreise des Dreiecks.
- Die von einem Eckpunkt zu den Berührpunkten eines Ankreises reichenden Tangentenabschnitte sind jeweils gleich lang.

Satz von Stewart

Wahrscheinlich schon 300 v.Chr. von Archimedes entdeckt,
1746 von Stewart formuliert, 1751 von Simson bewiesen.

Konfiguration:

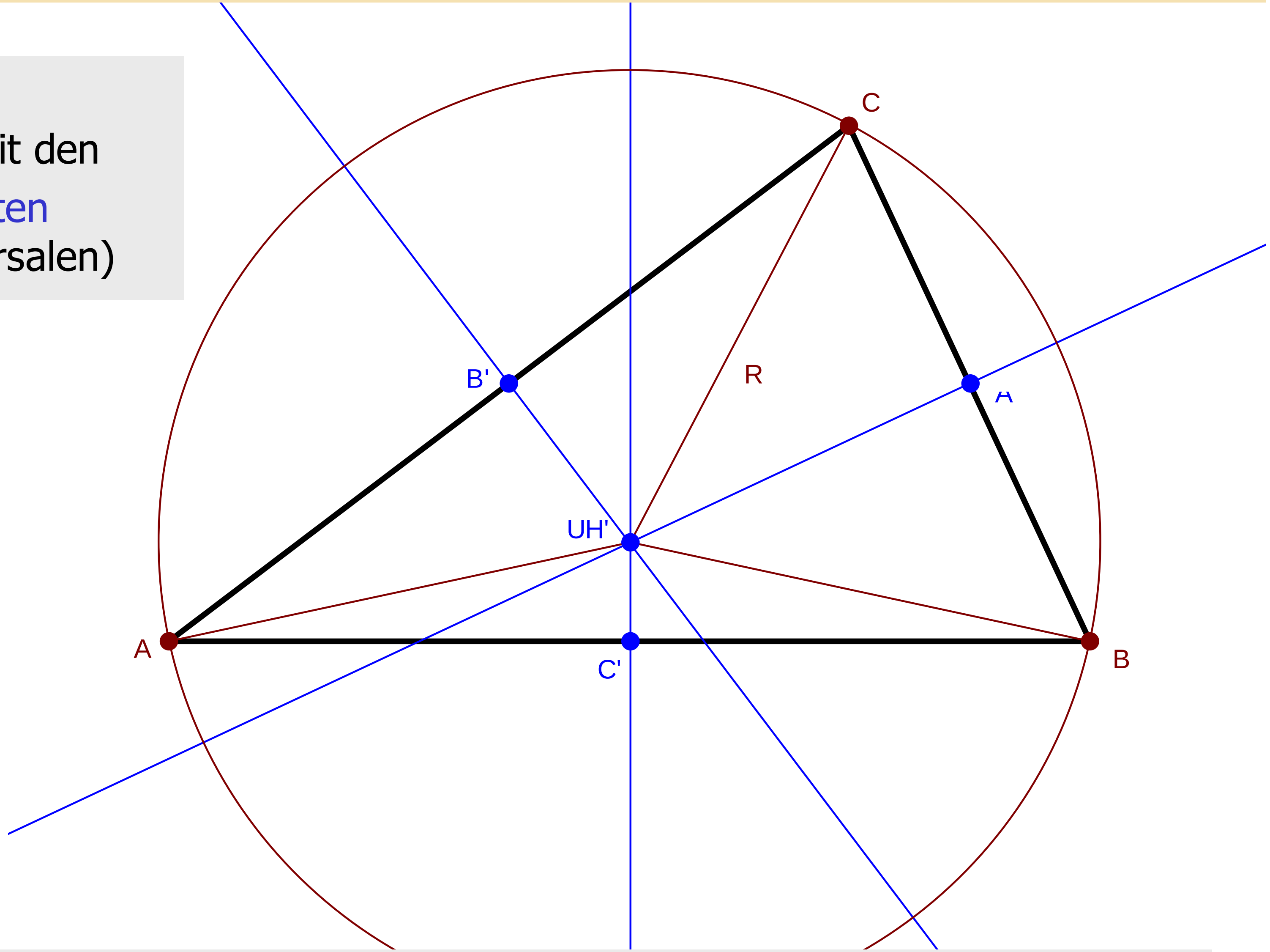
- Dreieck ABC mit der
- Ecktransversalen CT der Länge t, die die Seite [AB] in zwei Strecken [AT] der Länge m und [TB] der Länge n teilt



$$t = \sqrt{\frac{m}{m+n} \cdot a^2 + \frac{n}{m+n} \cdot b^2 - mn}$$

Mittelsenkrechte des Dreiecks und Umkreismittelpunkt

Konfiguration:
- Dreieck ABC mit den
- Mittelsenkrechten (Mittentransversalen)

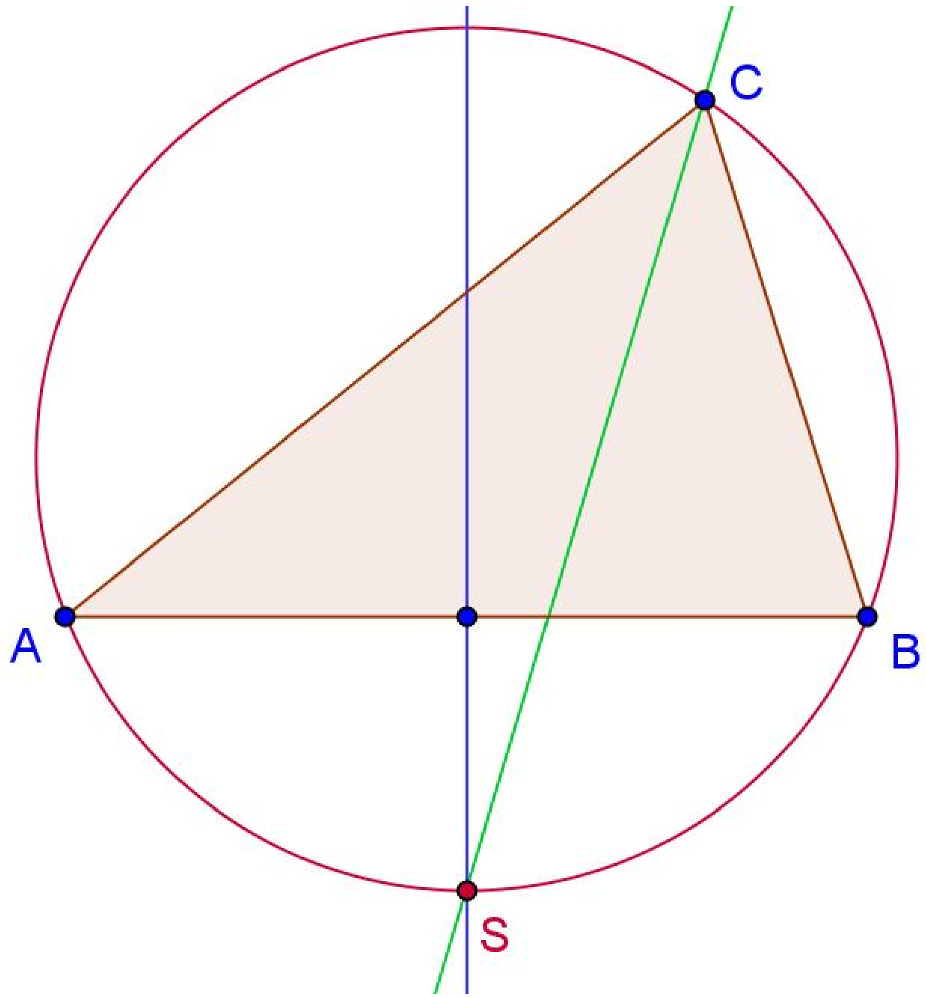


- Die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt U.
- U ist der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks.

Mittelsenkrechte und Winkelhalbierende – „Südpolsatz“

Konfiguration:

- Dreieck ABC mit einer
- Mittelsenkrechten (Mittentransversalen)
- und der „zugehörigen“ Winkelhalbierenden (Ecktransversalen)



Die Mittelsenkrechte einer Dreiecksseite und die Winkelhalbierende des dieser Seite gegenüberliegenden Winkels schneiden sich auf dem Umkreis des Dreiecks.

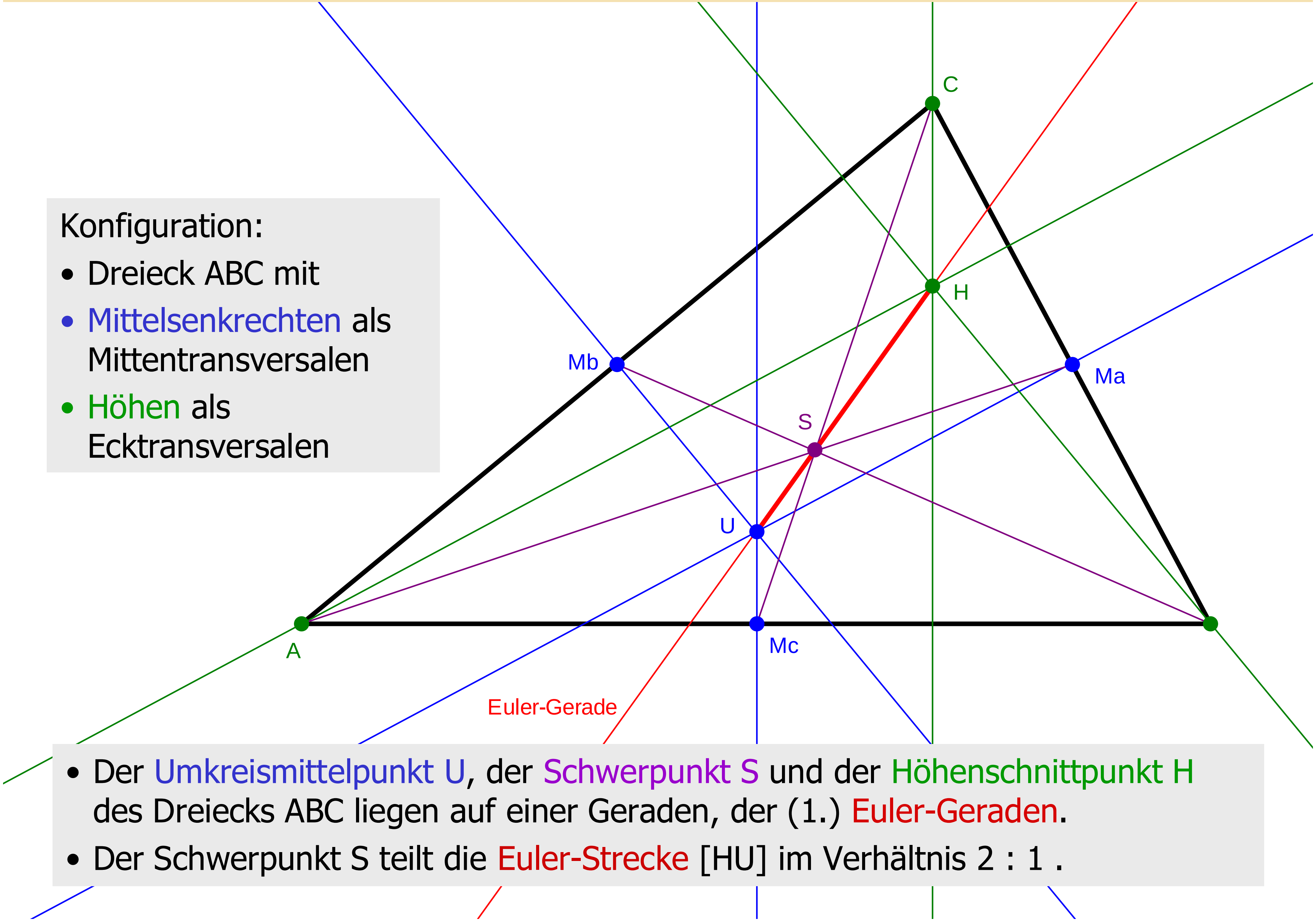
Mittendreieck und Höhenschnittpunkt

Konfiguration:

- Dreieck ABC mit dem
- Mittendreieck, den
- Mittelsenkrechten und den
- Seitenhalbierenden

- Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks sind zugleich Seitenhalbierende seines Mittendreiecks, also gilt auch S = S‘.
- Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks ABC sind zugleich die Höhen seines Mittendreiecks, die sich also in U = H‘ schneiden.
- In jedem Dreieck schneiden sich die Höhen in einem Punkt, dem Höhenschnittpunkt H.

1. Euler-Gerade mit H, S, U



Konfiguration:

- Dreieck ABC mit
- Mittelsenkrechten als Mittentransversalen
- Höhen als Ecktransversalen

- Der Umkreismittelpunkt U, der Schwerpunkt S und der Höhenschnittpunkt H des Dreiecks ABC liegen auf einer Geraden, der (1.) Euler-Geraden.
- Der Schwerpunkt S teilt die Euler-Strecke [HU] im Verhältnis 2 : 1 .

Teilverhältnisse

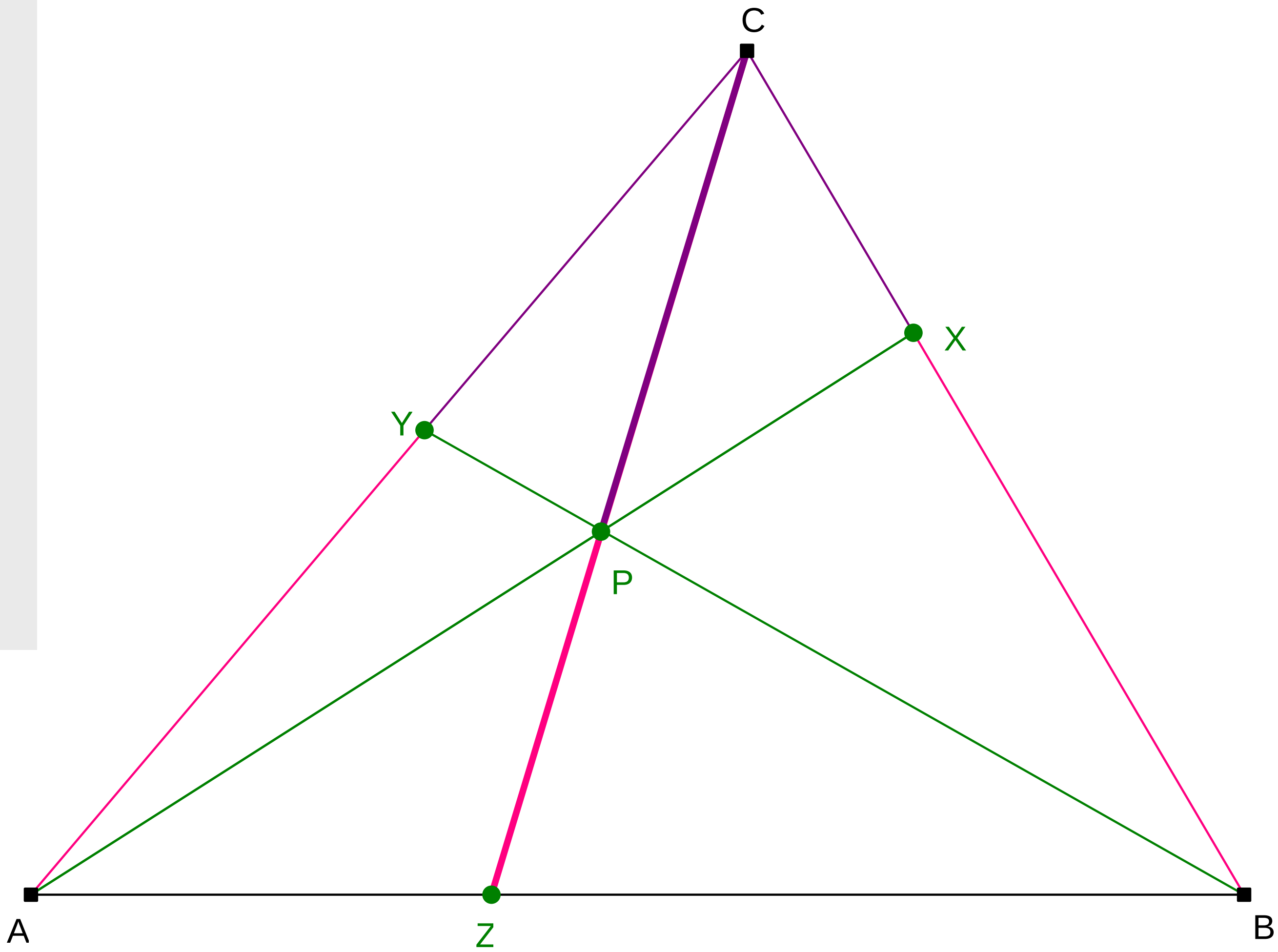
und

weitere
Ecktransversalen

Teilung einer Ecktransversalen

Konfiguration:

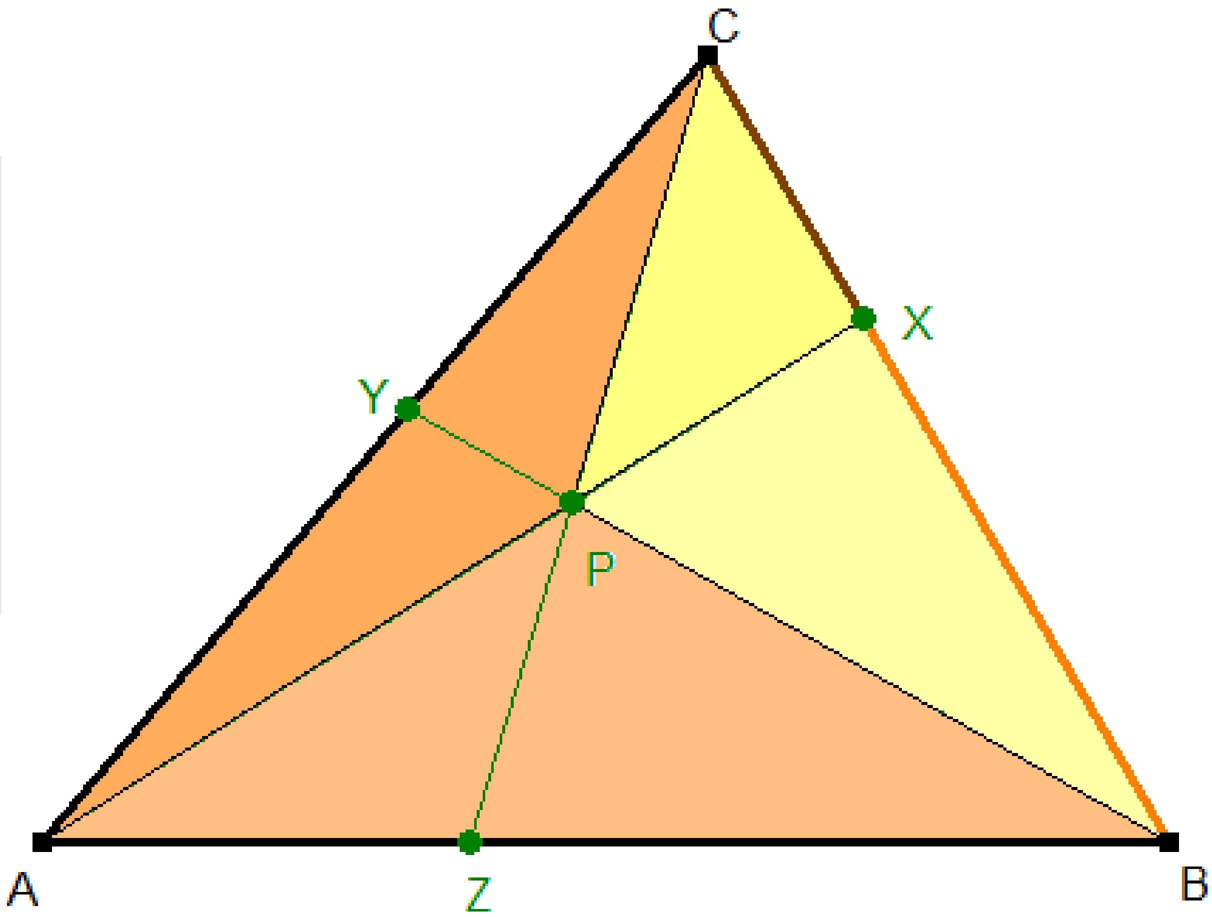
- Dreieck ABC mit
- Z auf [AB],
  X auf [BC],
  Y auf [CA]
- Ecktransversalen
  AX, BY, CZ,
  die sich in P
  schneiden.



$$\frac{\overline{CP}}{\overline{PZ}} = \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} + \frac{\overline{CX}}{\overline{XB}}$$

Satz von Ceva

Konfiguration:
- Dreieck ABC mit
- Z auf [AB],
  X auf [BC],
  Y auf [CA]
- Ecktransversalen
  AX, BY, CZ



Die drei Ecktransversalen AX, BY, CZ durch die gegenüberliegenden Teilpunkte X, Y, Z der Seiten des Dreiecks ABC schneiden sich genau dann in einem Punkt, wenn das Produkt der Teilverhältnisse der drei Teilpunkte den Wert 1 besitzt, wenn also gilt

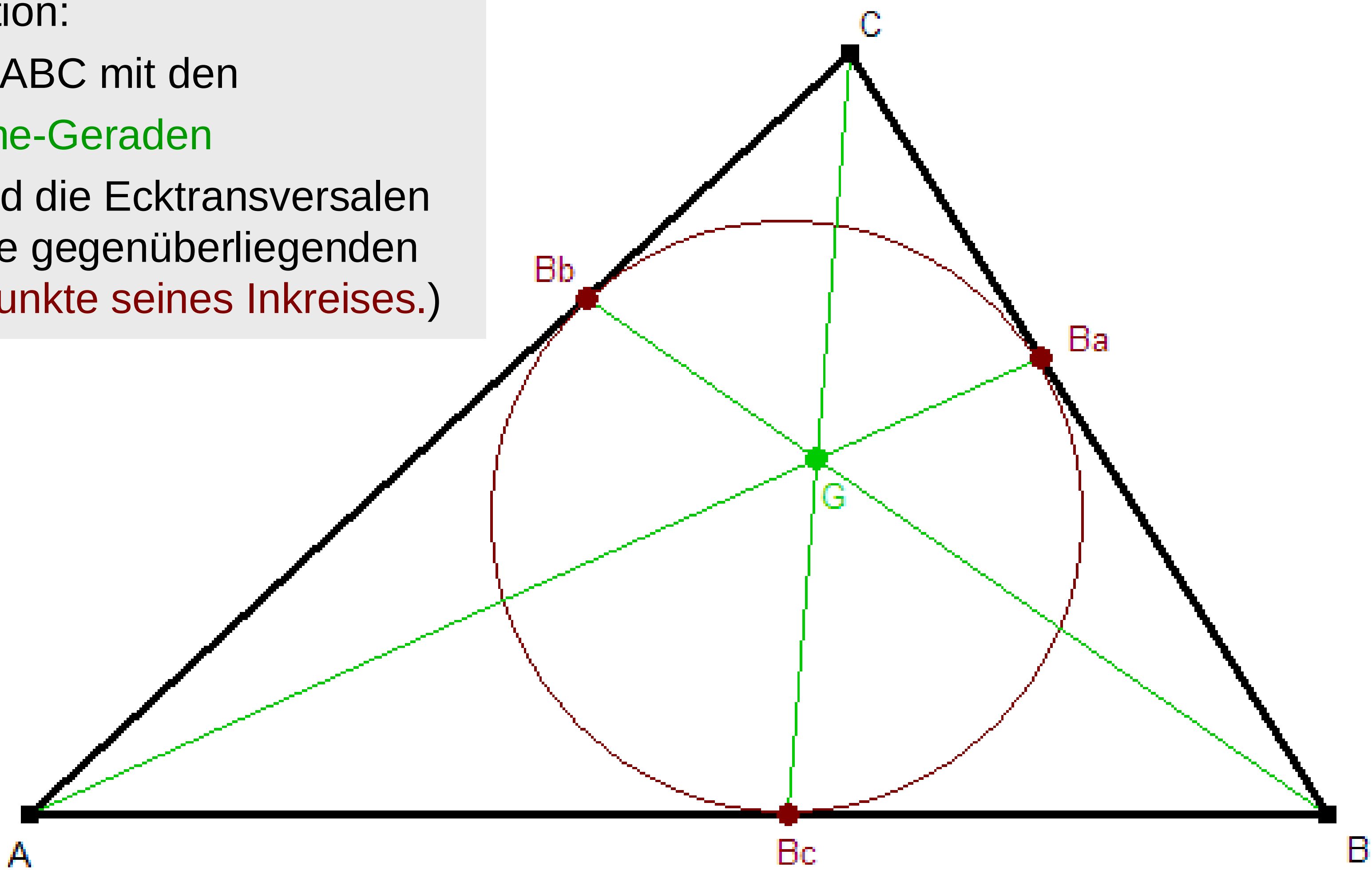
$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = 1$$

Gergonne-Geraden und Gergonne-Punkt

Konfiguration:

- Dreieck ABC mit den
- Gergonne-Geraden

  (Das sind die Ecktransversalen durch die gegenüberliegenden Berührpunkte seines Inkreises.)



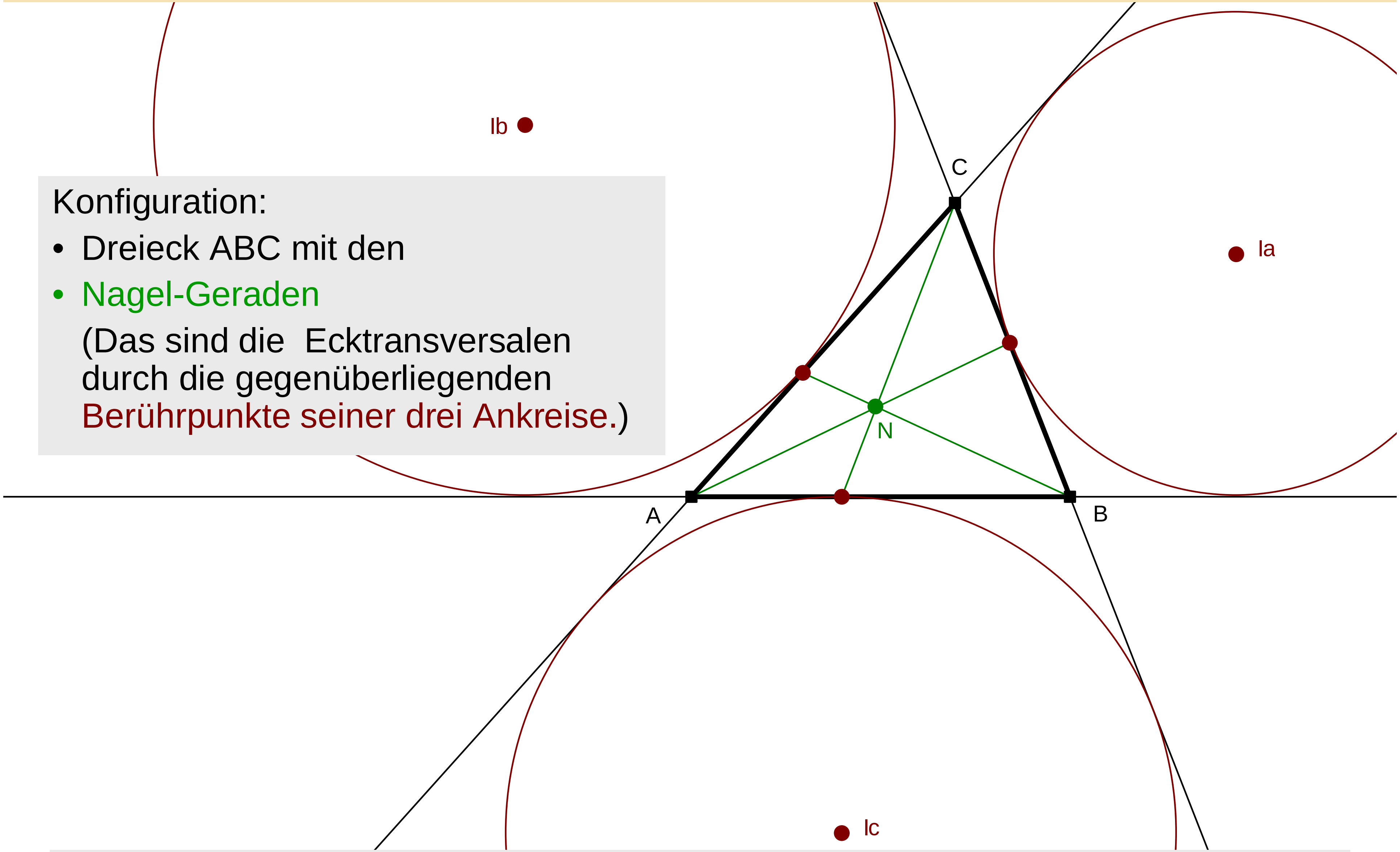
Die drei Ecktransversalen eines Dreiecks durch die gegenüberliegenden Berührpunkte seines Inkreises schneiden sich in einem Punkt, dem Gergonne-Punkt G.

Nagel-Geraden und Nagel-Punkt

Konfiguration:

- Dreieck ABC mit den
- Nagel-Geraden

  (Das sind die Ecktransversalen durch die gegenüberliegenden Berührpunkte seiner drei Ankreise.)



Die drei Ecktransversalen eines Dreiecks durch die gegenüberliegenden Berührpunkte seiner drei Ankreise schneiden sich in einem Punkt, dem Nagel-Punkt N.

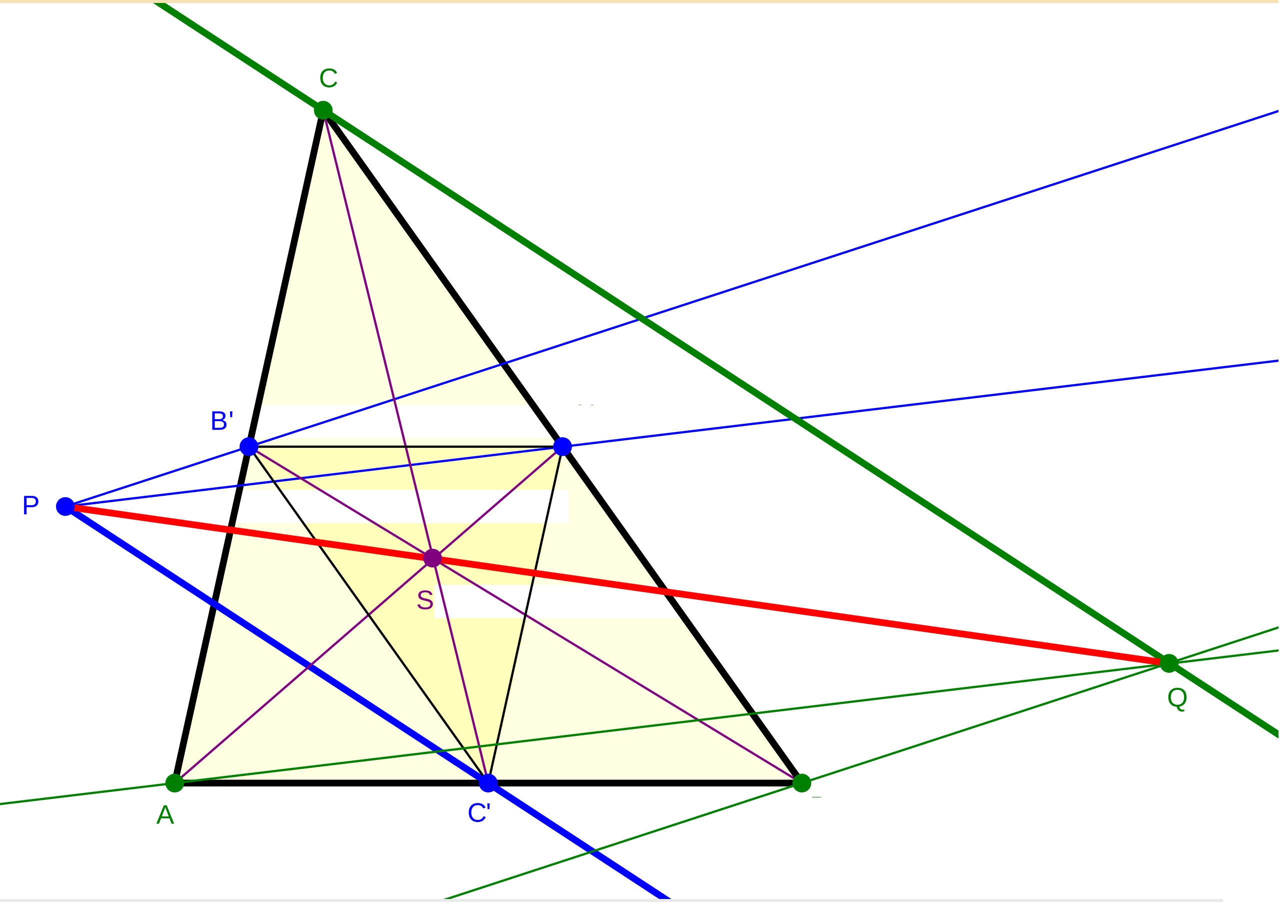
Parallele

Ecktransversalen
und
Mittentransversalen

Ein grundlegender Satz über parallele Eck- und Mittentransversalen

Konfiguration:

- Dreieck ABC mit den
- Seitenmitten A‘, B‘, C‘
- Mittentransversalen durch A‘, B‘, C‘ und
- dazu parallelen Ecktransversalen durch A, B, C

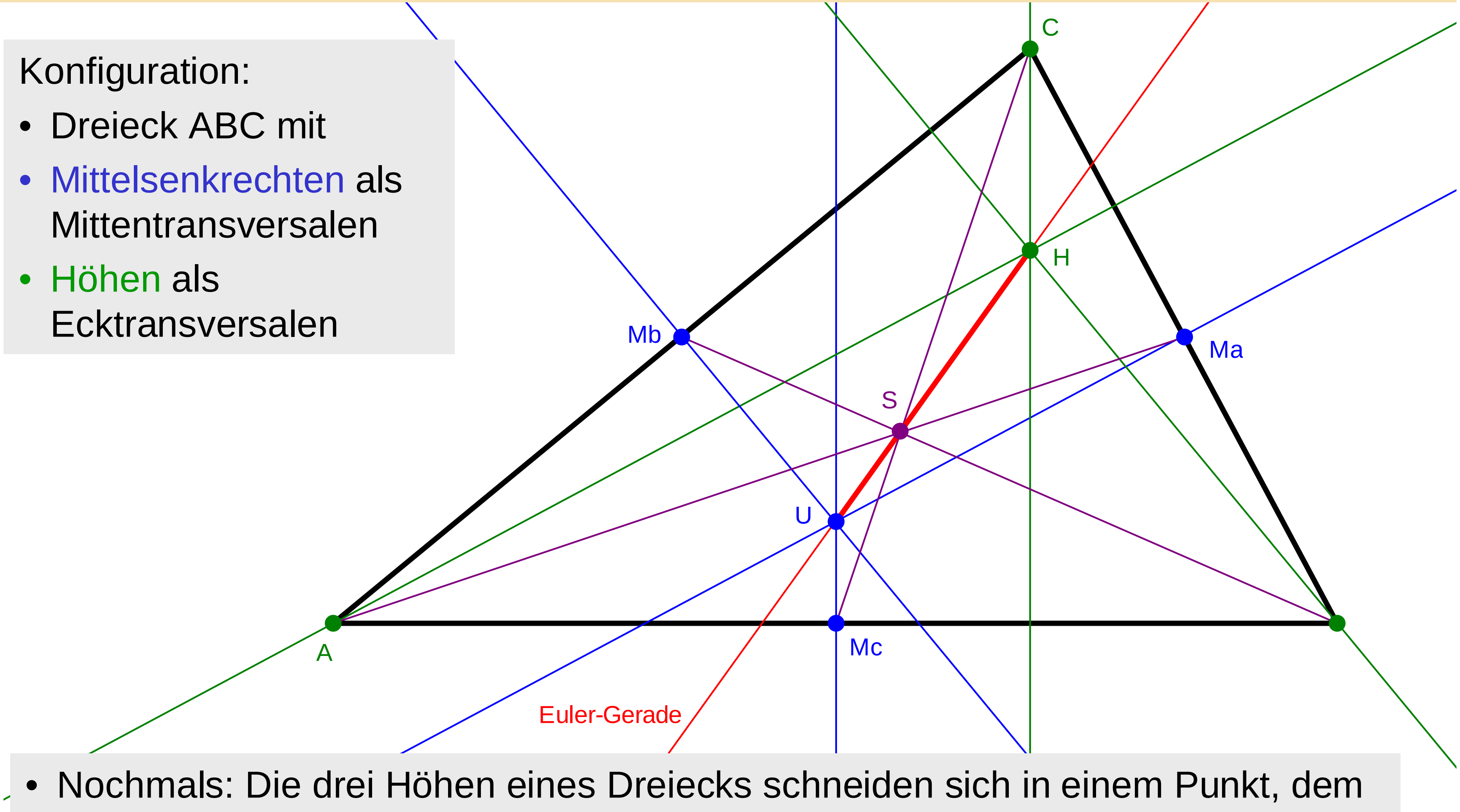


- Wenn sich die Mittentransversalen in einem Punkt P schneiden, dann schneiden sich die dazu parallelen Ecktransversalen in einem Punkt Q.
- Wenn sich die Ecktransversalen in einem Punkt Q schneiden, dann schneiden sich die dazu parallelen Mittentransversalen in einem Punkt P.
- P, Q und der Schwerpunkt S des Dreiecks ABC liegen auf einer Geraden.
- Der Schwerpunkt S teilt die Strecke [QP] im Verhältnis 2 : 1 .

1. Euler-Gerade mit H, S, U

Konfiguration:

- Dreieck ABC mit
- Mittelsenkrechten als Mittentransversalen
- Höhen als Ecktransversalen

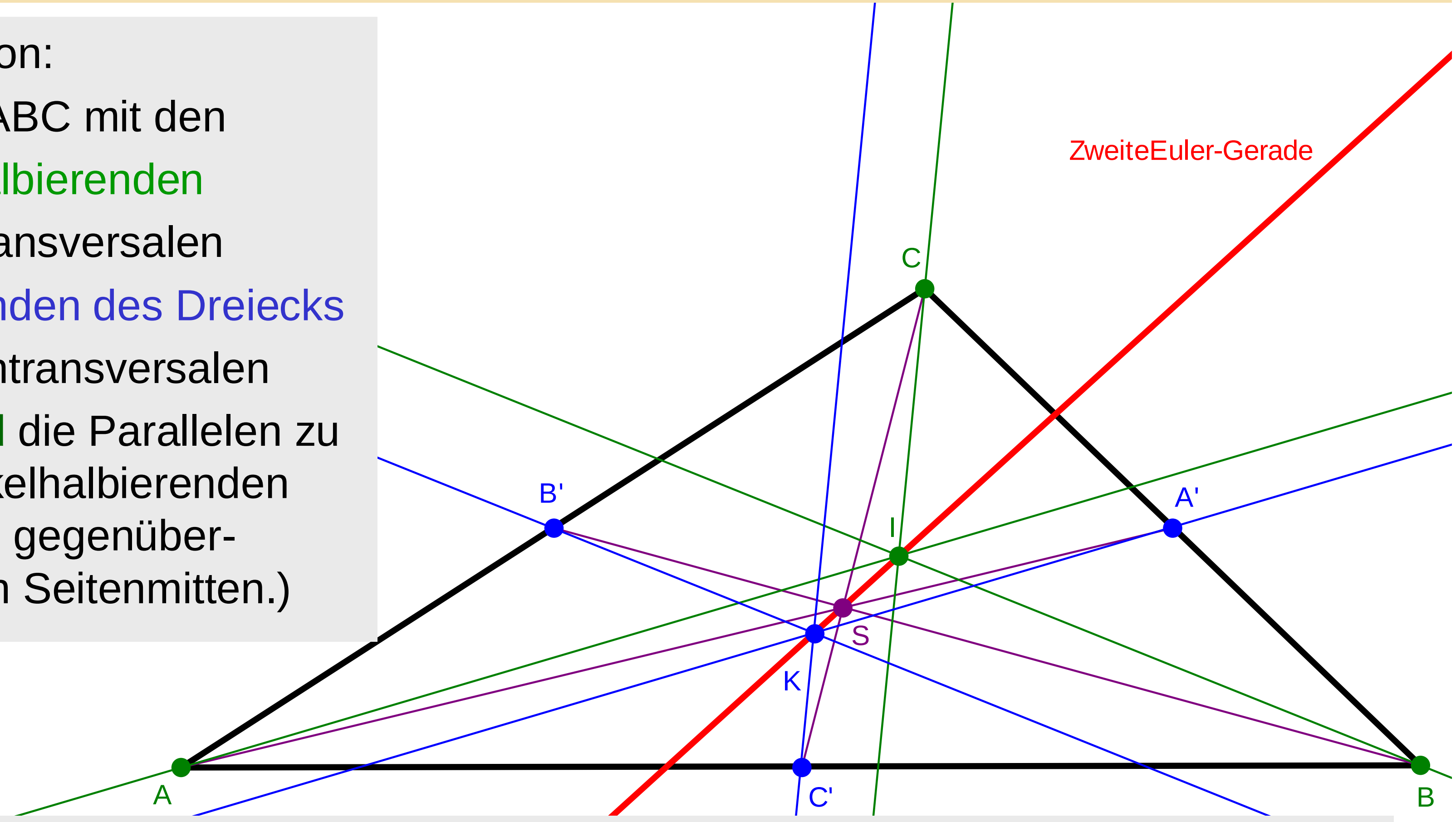


- Nochmals: Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, dem Höhenschnittpunkt H.
- Der Umkreismittelpunkt U, der Schwerpunkt S und der Höhenschnittpunkt H des Dreiecks ABC liegen auf einer Geraden, der (1.) Euler-Geraden.
- Der Schwerpunkt S teilt die Euler-Strecke [HU] im Verhältnis 2 : 1 .

Halbierendenschnittpunkt - 2. Euler-Gerade mit I, S, K

Konfiguration:

- Dreieck ABC mit den
- Winkelhalbierenden
  als Ecktransversalen
- Halbierenden des Dreiecks
  als Mittentransversalen
  (Das sind die Parallelen zu den Winkelhalbierenden durch die gegenüber-liegenden Seitenmitten.)

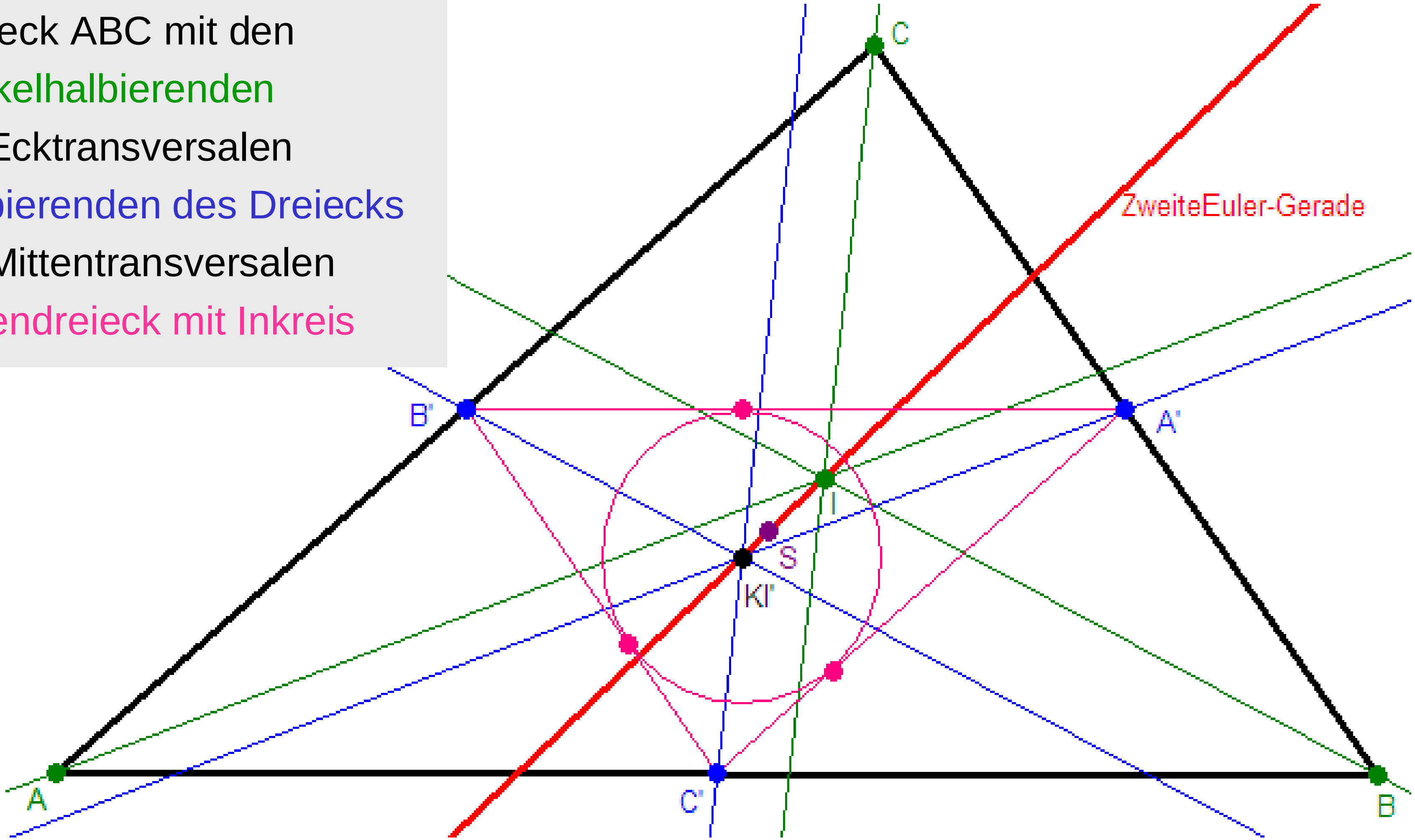


- Die drei Halbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, dem Halbierendenschnittpunkt K.
- Der Inkreismittelpunkt I, der Schwerpunkt S und der Halbierendenschnittpunkt K des Dreiecks ABC liegen auf einer Geraden, der
  2. Euler-Geraden.
- Der Schwerpunkt S teilt die Strecke [IK] im Verhältnis 2 : 1 .

Halbierendenschnittpunkt als Inkreismittelpunkt des Mittendreiecks

Konfiguration:

- Dreieck ABC mit den
- Winkelhalbierenden
  als Ecktransversalen
- Halbierenden des Dreiecks
  als Mittentransversalen
- Mittendreieck mit Inkreis

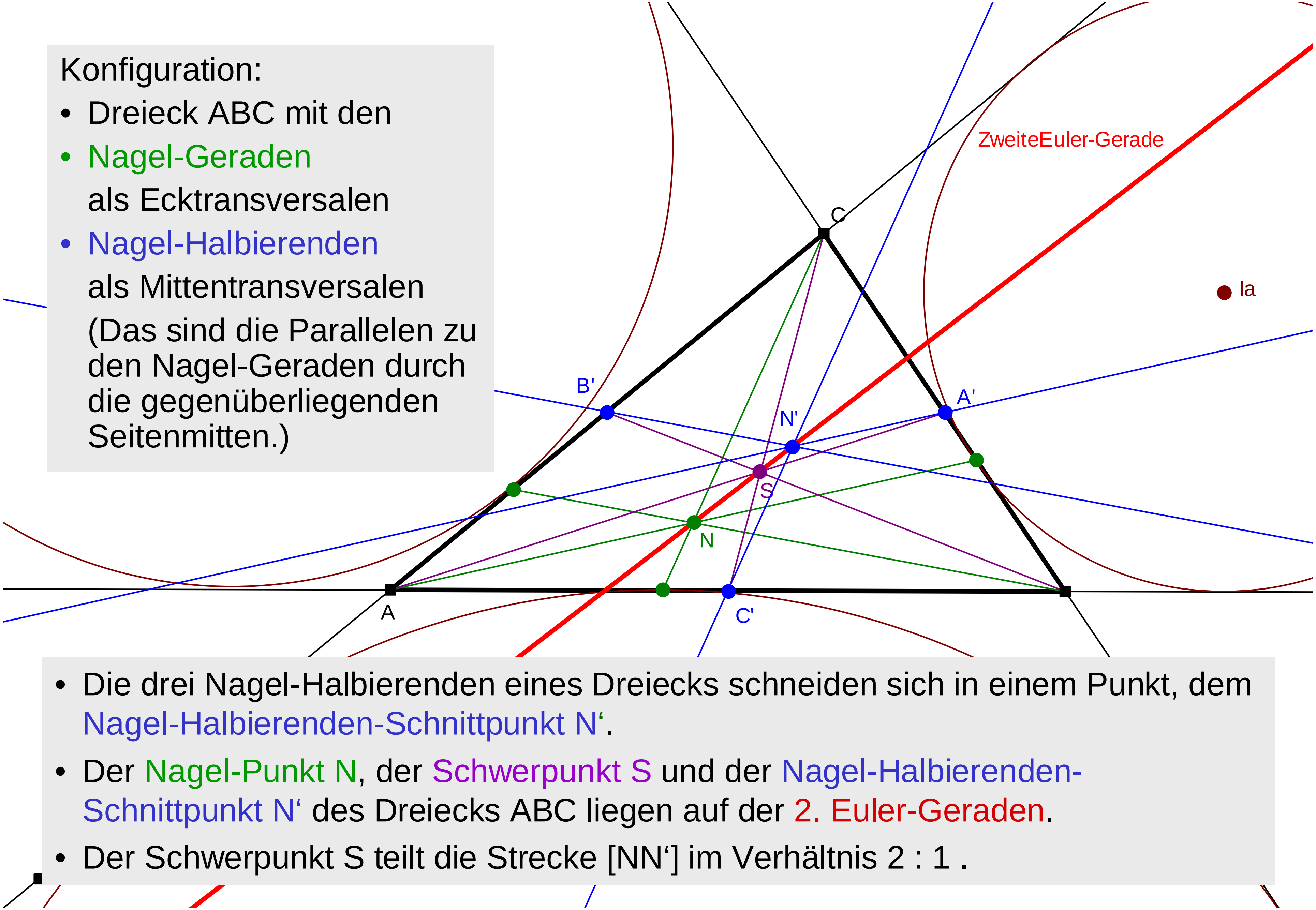


K ist zugleich der Inkreismittelpunkt I‘ des Mittendreiecks A‘B‘C‘.

Nagel-Halbierenden-Schnittpunkt - 2. Euler-Gerade mit N, S, I

Konfiguration:

- Dreieck ABC mit den
- Nagel-Geraden als Ecktransversalen
- Nagel-Halbierenden als Mittentransversalen (Das sind die Parallelen zu den Nagel-Geraden durch die gegenüberliegenden Seitenmitten.)

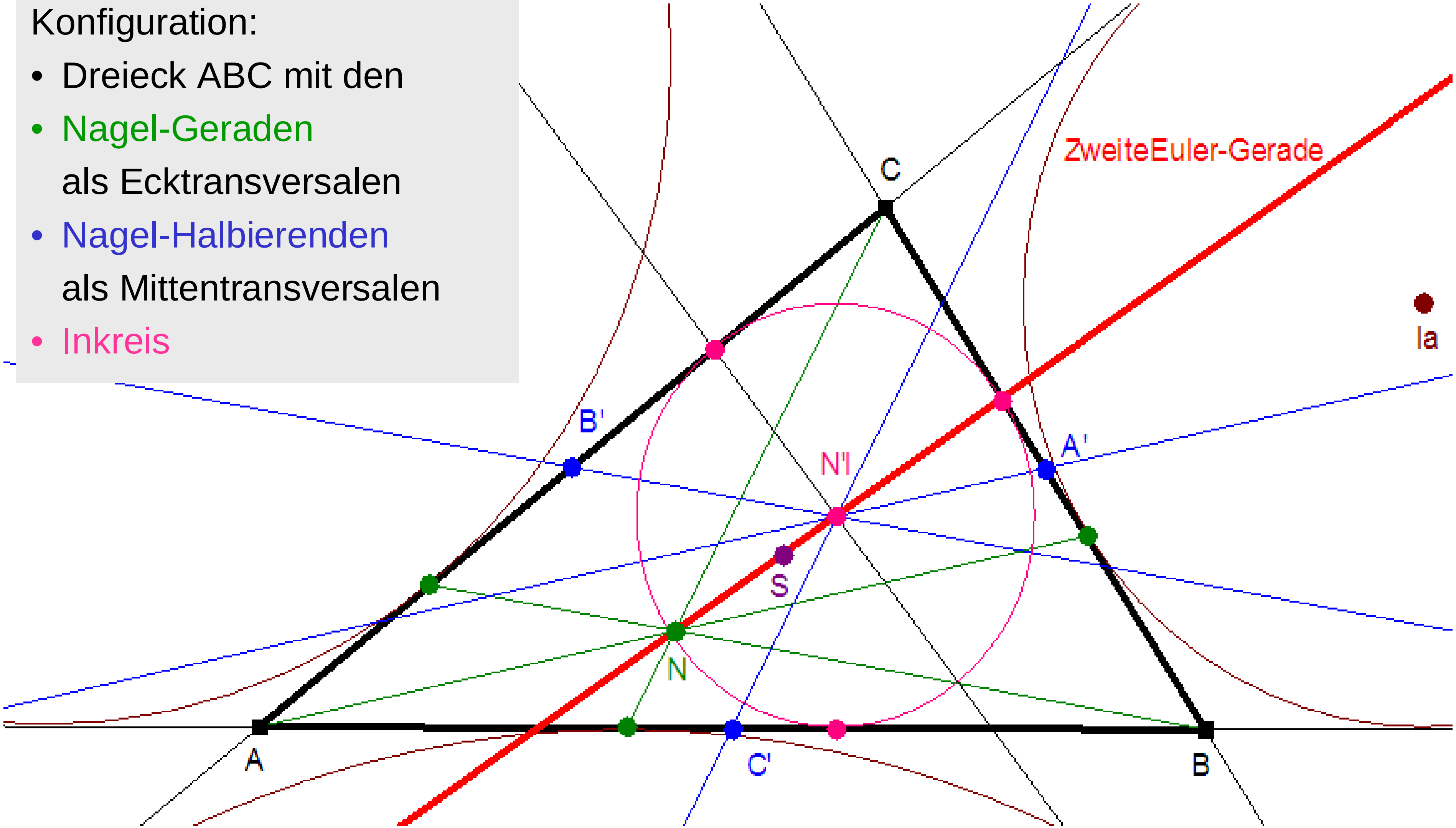


- Die drei Nagel-Halbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, dem Nagel-Halbierenden-Schnittpunkt N‘.
- Der Nagel-Punkt N, der Schwerpunkt S und der Nagel-Halbierenden-Schnittpunkt N‘ des Dreiecks ABC liegen auf der 2. Euler-Geraden.
- Der Schwerpunkt S teilt die Strecke [NN‘] im Verhältnis 2 : 1 .

Nagel-Halbierenden-Schnittpunkt als Inkreismittelpunkt

Konfiguration:

- Dreieck ABC mit den
- Nagel-Geraden
  als Ecktransversalen
- Nagel-Halbierenden
  als Mittentransversalen
- Inkreis

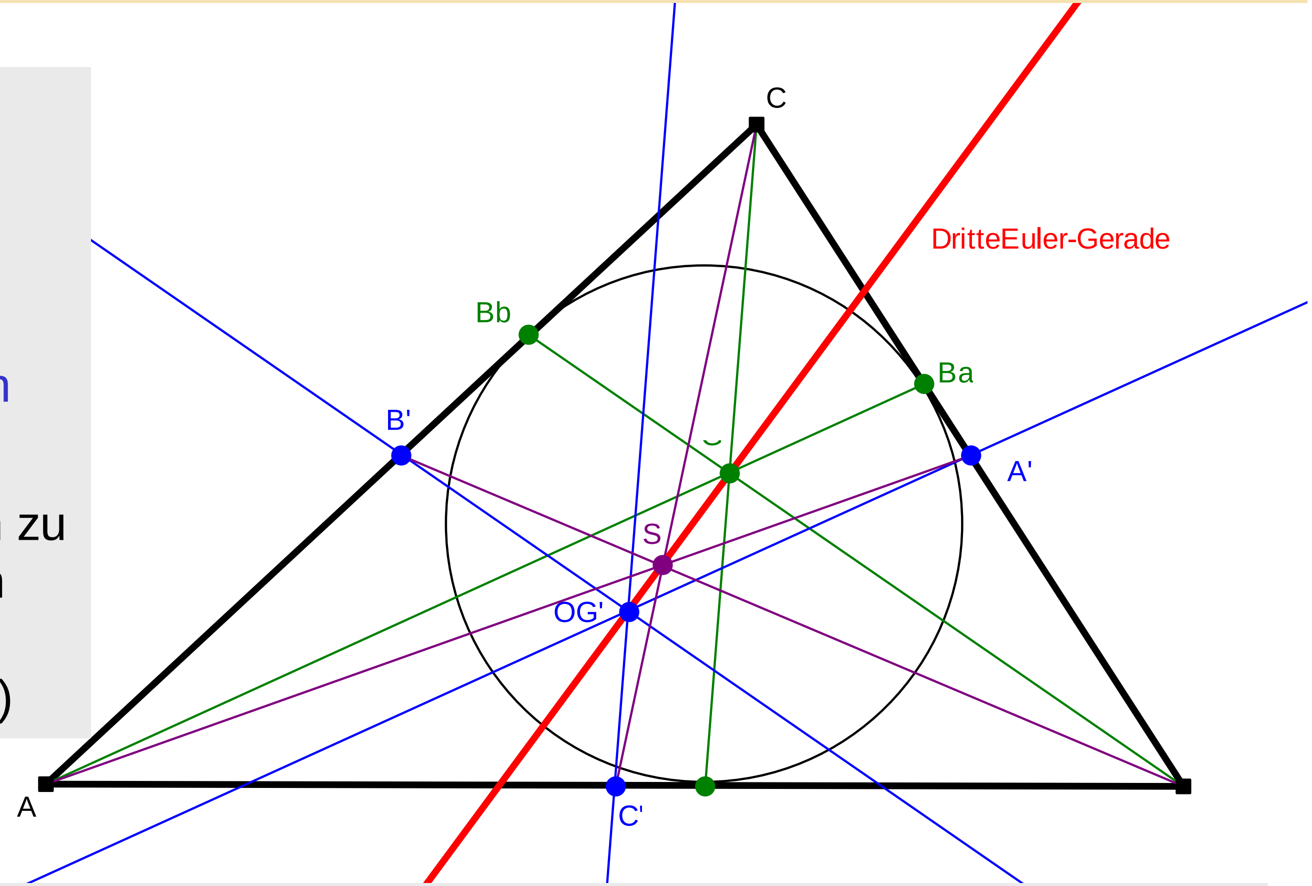


N‘ ist zugleich der Inkreismittelpunkt I des Dreiecks ABC.

Gergonne-Halbierenden-Schnittpunkt - 3. Euler-Gerade

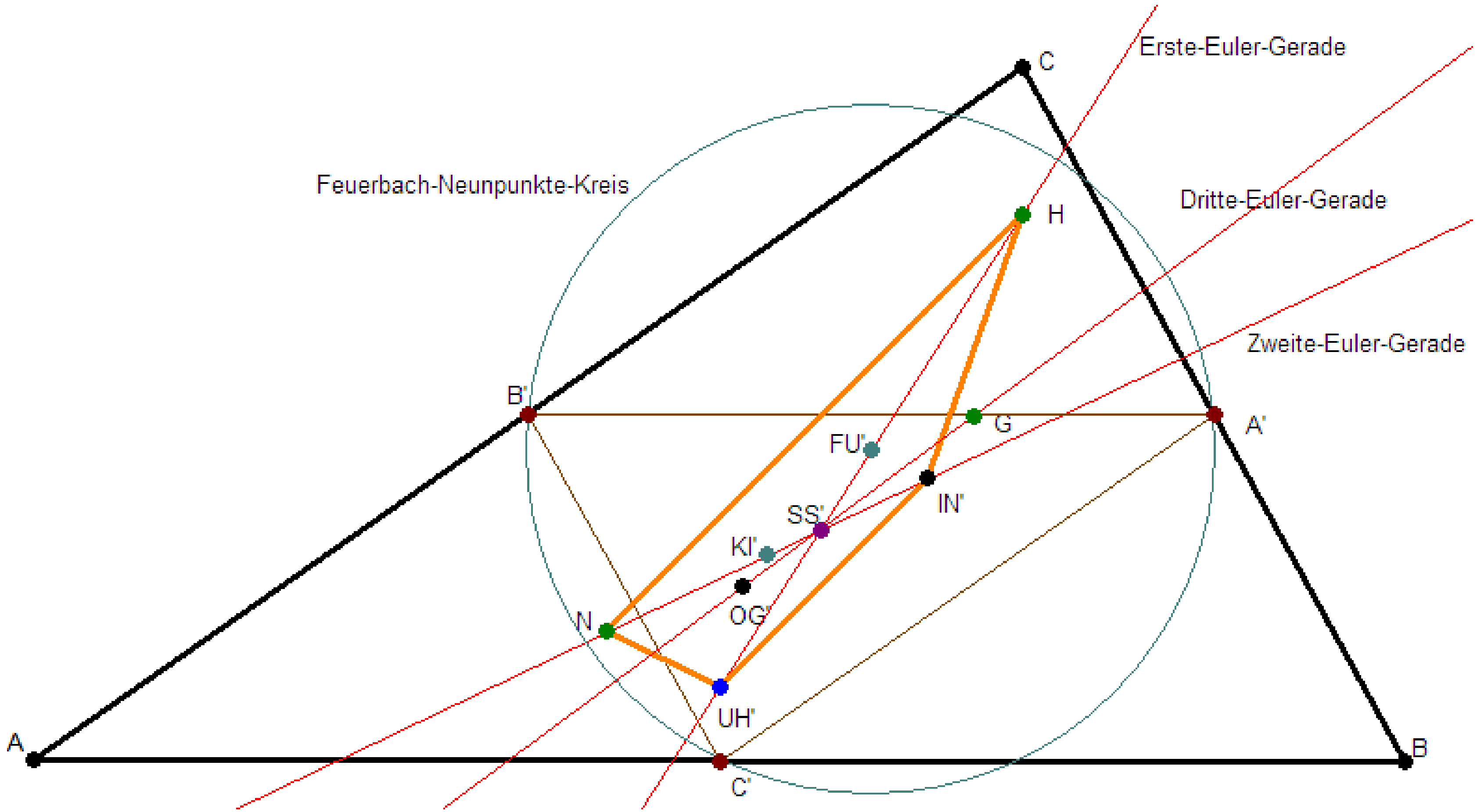
Konfiguration:

- Dreieck ABC mit den
- Gergonne-Geraden als Ecktransversalen
- Gergonne-Halbierenden als Mittentransversalen (Das sind die Parallelen zu den Gergonne-Geraden durch die gegenüber-liegenden Seitenmitten.)



- Die drei Gergonne-Halbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, dem Gergonne-Halbierenden-Schnittpunkt G‘.
- Der Gergonne-Punkt G, der Schwerpunkt S und der Gergonne-Halbierenden-Schnittpunkt G‘ des Dreiecks ABC liegen auf einer Geraden, der 3. Euler-Geraden.
- Der Schwerpunkt S teilt die Strecke [GG‘] im Verhältnis 2 : 1 .
- G‘ ist gleichzeitig der Mittenpunkt O des Dreiecks ABC.

Die drei Euler-Geraden mit acht harmonischen Punkten und einem Trapez

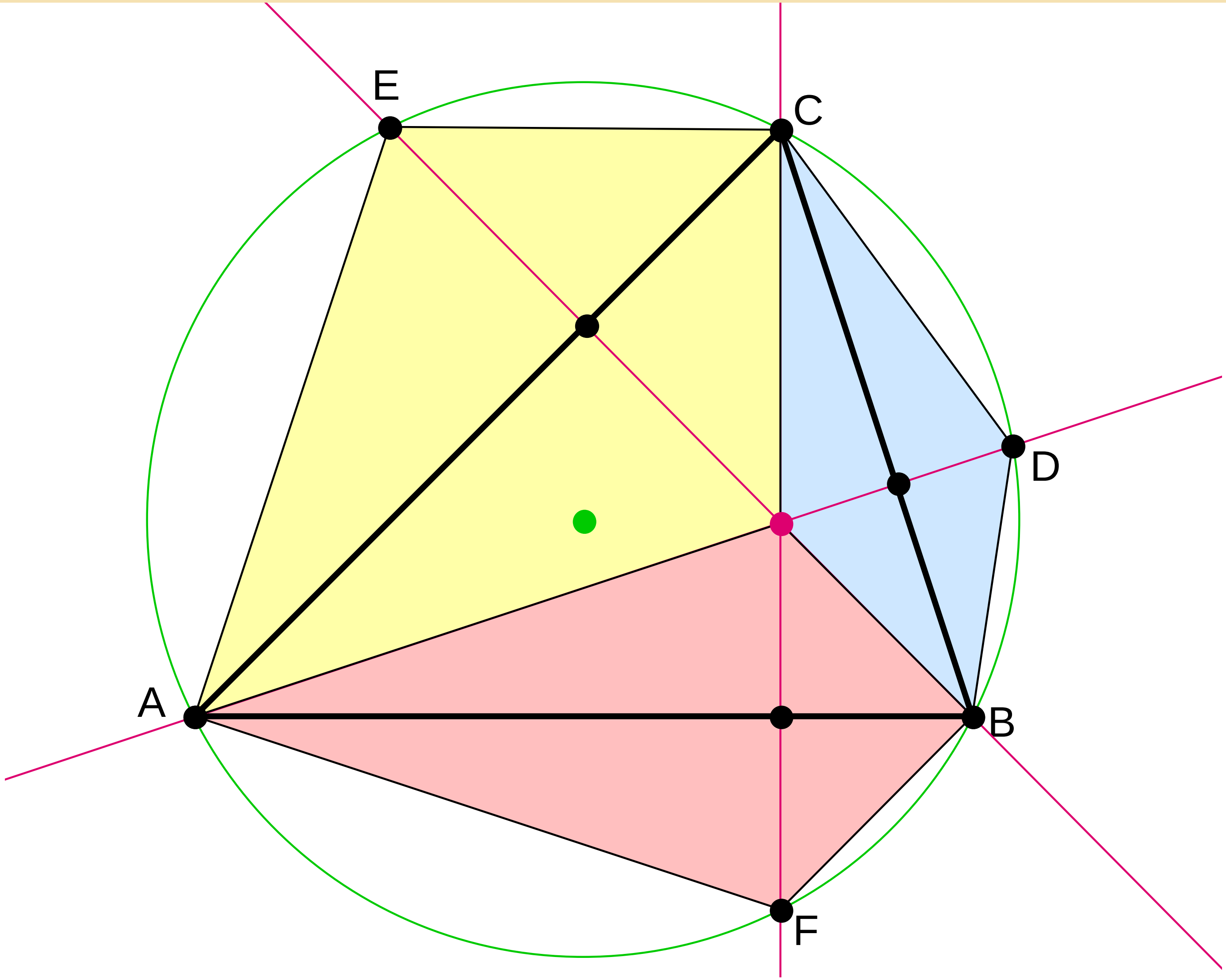


- Die 4 Punkte U=H‘, S=S‘, F=U‘, H liegen harmonisch auf der 1. Euler-Geraden.
- Die 4 Punkte I=N‘, S=S‘, K=I‘, N liegen harmonisch auf der 2. Euler-Geraden.
- Die 4 Punkte H, N, U, I bilden ein Trapez, bei dem sich die Längen der beiden Parallelseiten [NH] und [IU] wie 2 : 1 verhalten und dessen Diagonalen sich in S schneiden.

Die
Höhen
des
Dreiecks

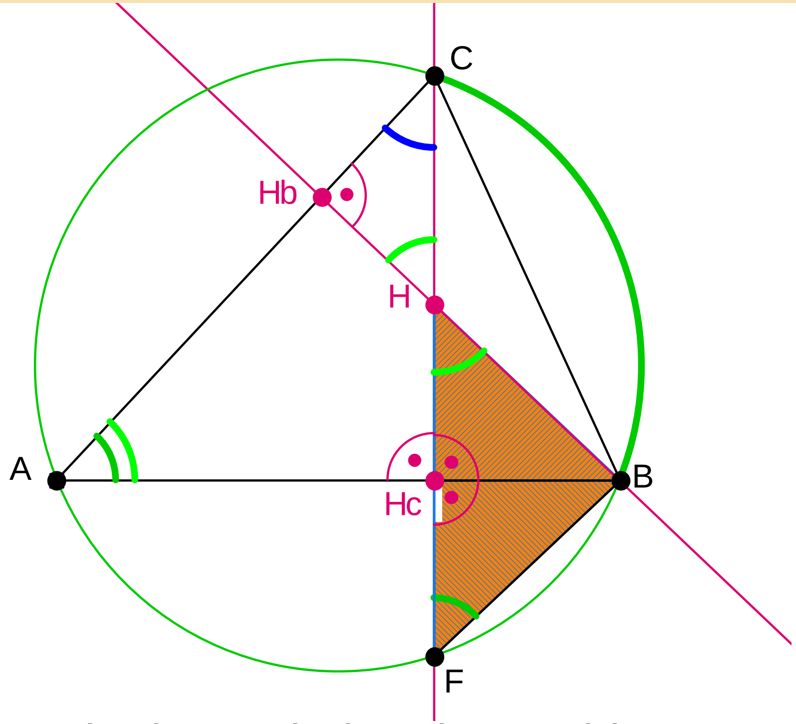
und die Lage
ihres Schnittpunkts

Spiegelpunkte des Höhenschnittpunkts - drei Drachenvierecke



Wenn man den Höhenschnittpunkt eines Dreiecks an den Dreiecksseiten spiegelt, liegen seine drei Bildpunkte auf dem Umkreis des Dreiecks.

Spiegelpunkte des Höhenschnittpunkts - Beweis

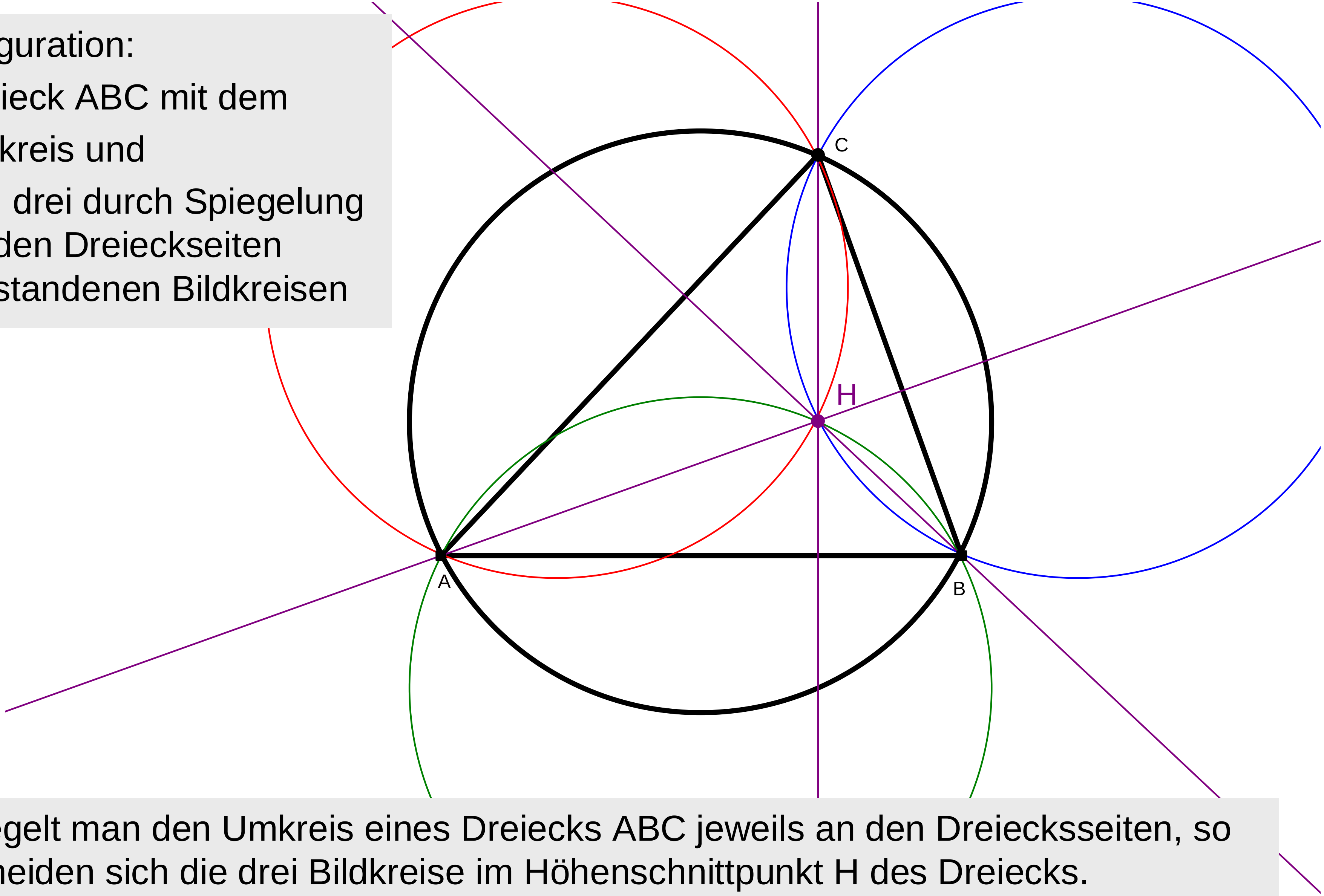


F ist der Schnittpunkt des Umkreises mit der über H_c hinaus verlängerten Höhe $[CH_c]$.
Im rechtwinkligen Dreieck AH_cC ergänzen sich die Winkel $\angle BAC$ und $\angle ACH_c$ zu 90°,
ebenso im rechtwinkligen Dreieck HH_bC die Winkel $\angle CHH_b$ und $\angle ACH_c$.
Deshalb sind $\angle BAC$ und $\angle CHH_b$ gleich groß.
Da $\angle CHH_b$ Scheitelwinkel zu $\angle BHF$ ist, sind auch $\angle BAC$ und $\angle BHF$ gleich groß.
Als Umfangswinkel über demselben Kreisbogen (BC) sind aber auch $\angle BAC$ und $\angle BFC$ gleich groß. Es gilt also $\angle BHF = \angle BFC$.
Das Dreieck BFH ist also wegen der kongruenten Basiswinkel gleichschenklig und somit bezüglich der Höhe $[BH_c]$ achsensymmetrisch.
Insbesondere sind dies auch H und F.

Der Höhenschnittpunkt als Schnittpunkt dreier Kreise

Konfiguration:

- Dreieck ABC mit dem
- Umkreis und
- den drei durch Spiegelung an den Dreieckseiten entstandenen Bildkreisen

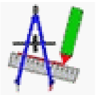


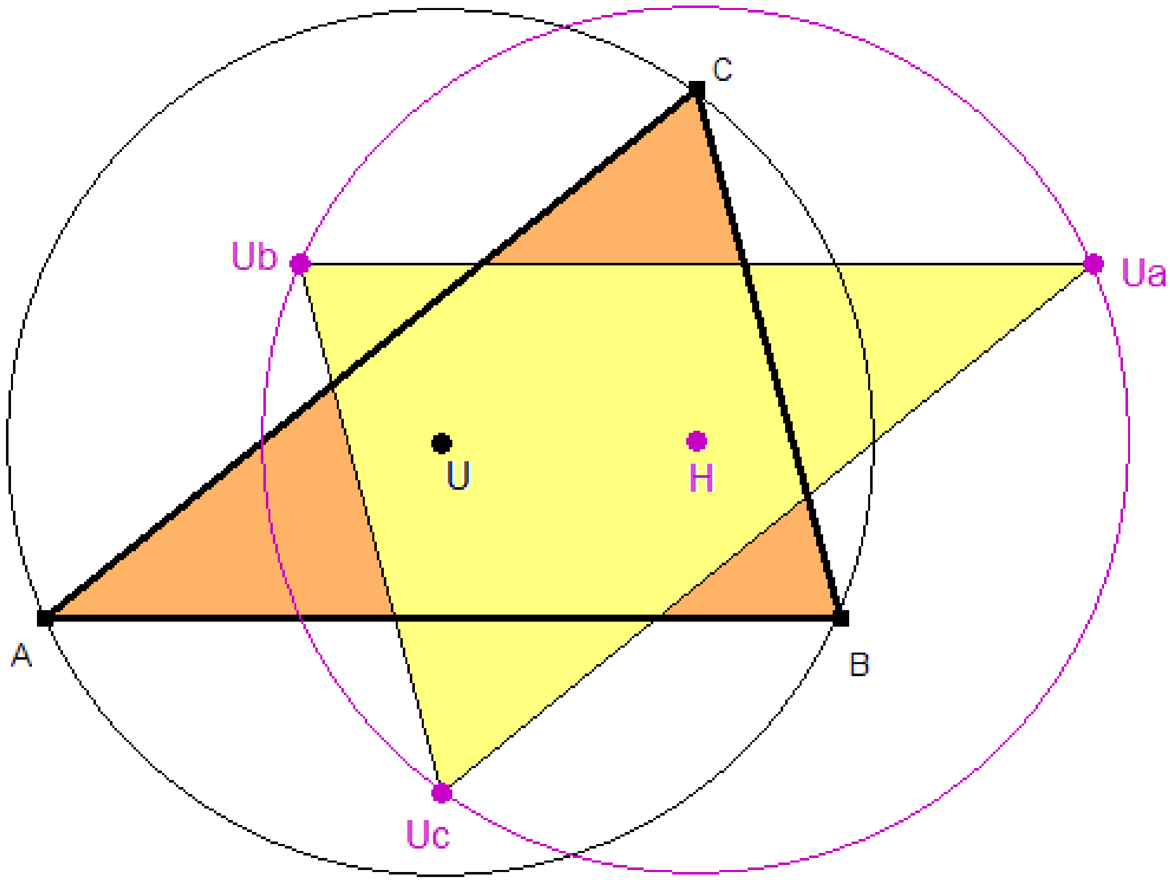
Spiegelt man den Umkreis eines Dreiecks ABC jeweils an den Dreiecksseiten, so schneiden sich die drei Bildkreise im Höhenschnittpunkt H des Dreiecks.

Ein zum Dreieck kongruentes Dreieck

Konfiguration:

- Dreieck ABC mit dem
- Umkreismittelpunkt U
- und den durch Spiegelung von U an den Dreieckseiten entstandenen Bildpunkten U_a, U_b, U_c





- Das Dreieck $U_aU_bU_c$ ist zum Dreieck ABC kongruent.
- Der Mittelpunkt seines Umkreises ist der Höhenschnittpunkt H.

Ortkurve von H, wenn sich C auf dem Umkreis vom Dreieck ABC bewegt

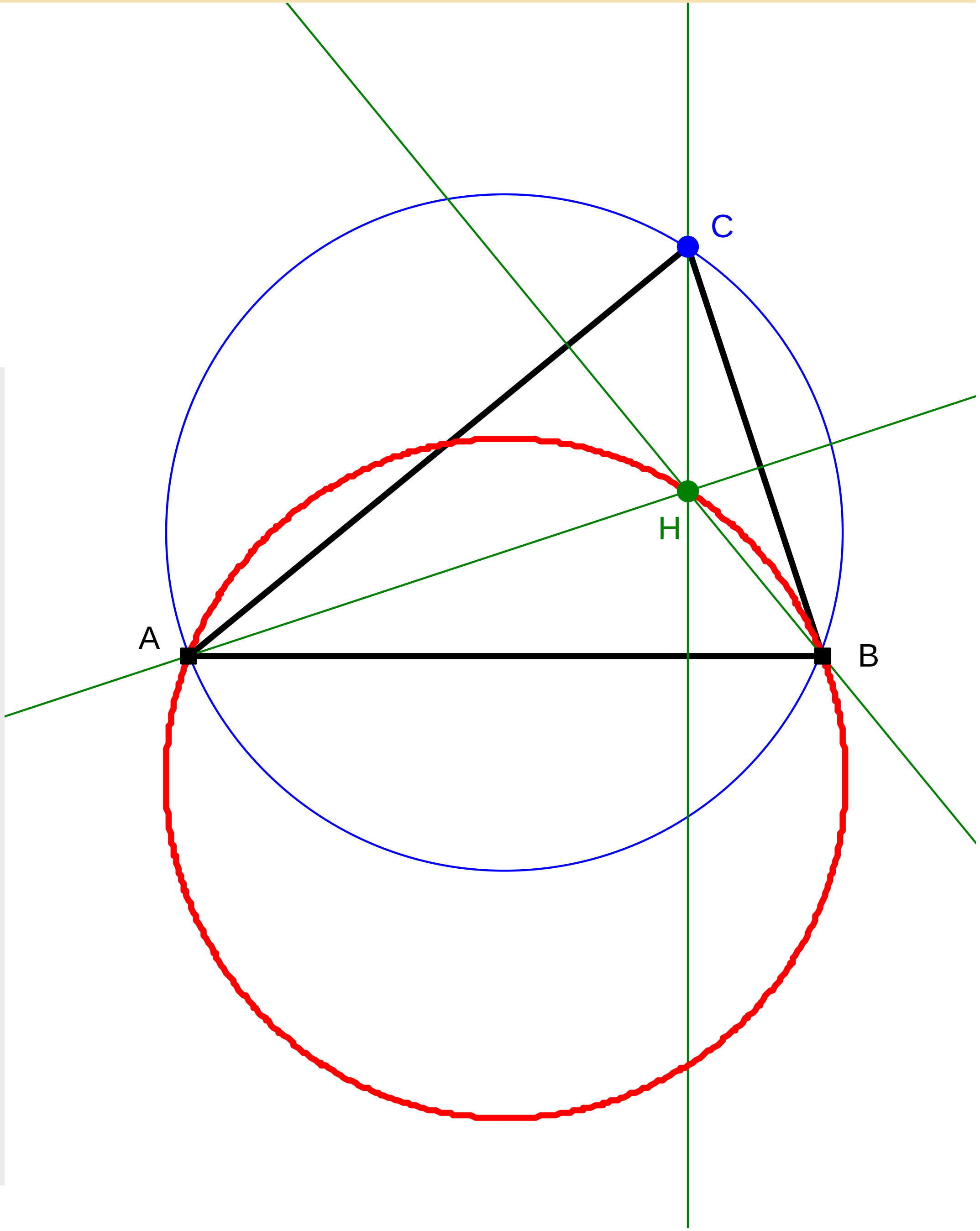
Konfiguration:

- Dreieck ABC mit dem
- Umkreis als Ortskurve für C

- Wenn der Punkt C den Umkreis des Dreiecks ABC durchläuft, dann durchläuft der Höhenschnittpunkt H des Dreiecks ABC den zum Umkreis bzgl. AB symmetrischen Kreis.

Folgerung:

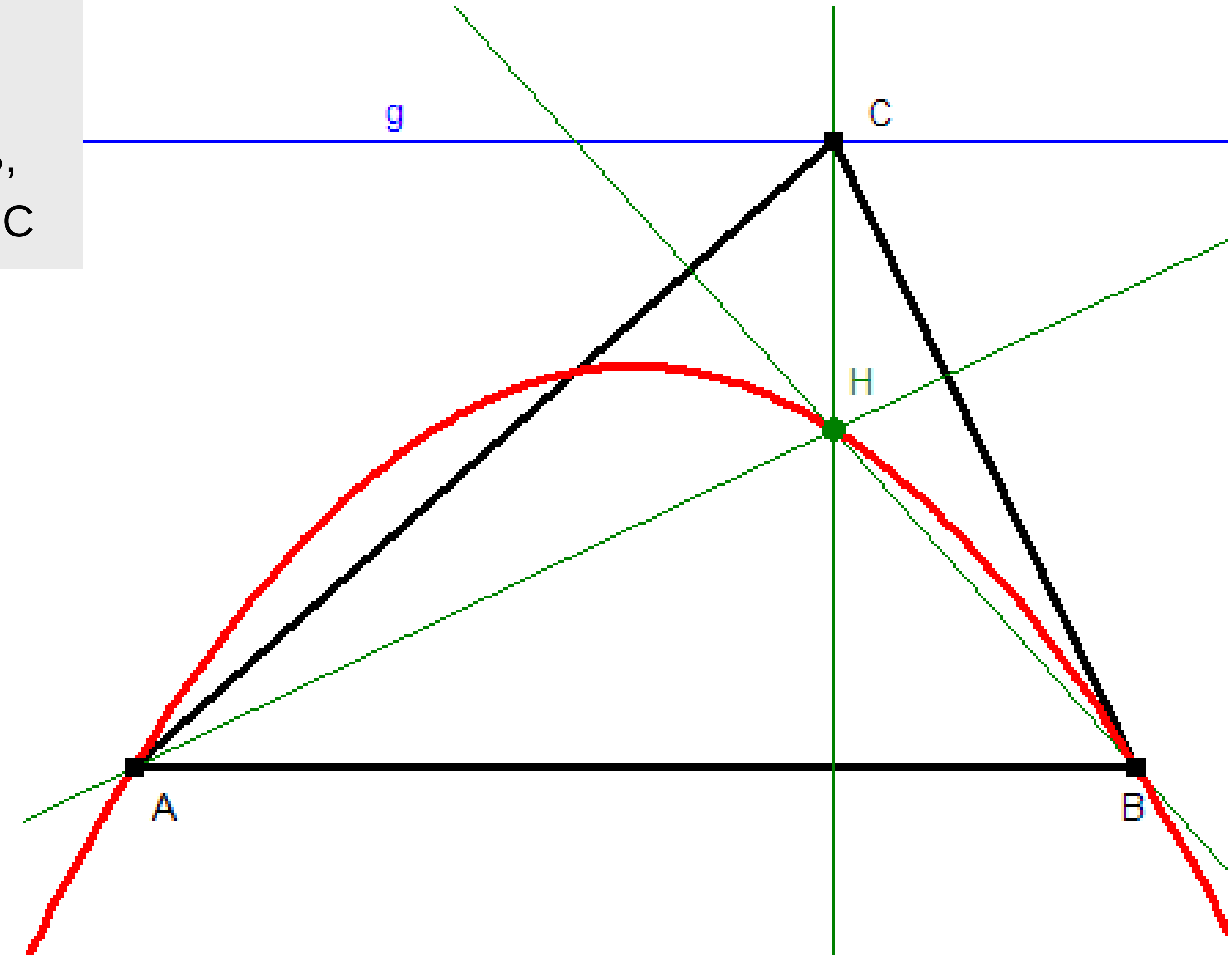
- Die Menge der Höhenschnittpunkte aller einem Kreis um M mit Radius r einbeschriebenen Dreiecke ist die offene Kreisscheibe um M mit Radius 3r.



Ortkurve von H, wenn sich C auf einer Parallelen zu AB bewegt

Konfiguration:

- Dreieck ABC
- Parallele g zu AB, als Ortskurve für C



Wenn sich der Punkt C auf einer Parallelen zu AB bewegt, bewegt sich der Höhenschnittpunkt H des Dreiecks ABC auf einer Parabel durch A und B.

Der
Feuerbachsche
Neunpunktekreis

‟This circle is the first really exciting one to appear in any course of elementary geometry.‟ – Daniel Pedoe

und der
Satz von Feuerbach,

‟undoubtedly one of the most beautiful theorems in the modern geometry of the triangle.‟ – H. Evans

Karl Wilhelm Feuerbach

Karl Wilhelm Feuerbach wurde 1800 als Sohn des Juristen Anselm von Feuerbach in Jena geboren.

Seine in gesellschaftlichen Kreisen sehr angesehene Familie war geprägt sowohl durch Genialität wie auch durch Geisteskrankheit einiger ihrer Mitglieder.

Feuerbachs Bruder Ludwig ist als Philosoph, sein Neffe Anselm Feuerbach als Maler berühmt geworden.

1822 veröffentlichte er sein bedeutendstes Werk

"Eigenschaften einiger merkwürdiger Punkte des geradlinigen Dreiecks und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren“

— 33 —

$$\overline{OS}^2 = (AF - AP)^2 + (OP - SF)^2.$$

Nun ist aber $AF = \frac{1}{2}(-a+b+c)$ und $AP = \frac{-a^2+b^2+c^2}{2c}$, folglich:

$$AF - AP = \frac{(a-b+c)(a+b-c) - c(a+b-c)}{2c};$$

ferner, weil (§. 35.) $OP = \frac{(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)}{8c\Delta}$, und (§. 2.) $SF = \frac{2\Delta}{a+b+c}$, so ist:

$$OP - SF = \frac{(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2) - c(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{8c\Delta}.$$

Substituirt man nun im Ausdrucke für $\overline{OS}^2$, so wird man denselben endlich in diese Form bringen können:

$$\overline{OS}^2 = \frac{(-a+b+c)^2(a-b+c)^2(a+b-c)^2 - (-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}{32\Delta^2},$$

woraus sich durch Einführung der Kreishalbmesser r, ρ, R ergiebt:

$$\overline{OS}^2 = 2r^2 - 2\rho R$$

Karl Wilhelm Feuerbach 2

Im selben Jahr 1822 schloss er sein Studium ab, welches durch ein ausschweifendes Leben geprägt gewesen sein soll.

Aus seiner Studienzeit nahm er hohe Schulden mit an seine erste Arbeitsstelle, die eines Professors am Gymnasium Erlangen.

Er verkehrte in seiner Erlangener Zeit in burschenschaftlichen Kreisen und verbrachte nach einer Verhaftung auf Grund einer unvorsichtigen politischen Äußerung zusammen mit einigen Freunden ab 1824 vierzehn Monate Haft in München.

Aus Schuldgefühlen, die Verhaftung seiner Freunde verursacht zu haben, wurde Karl Wilhelm Feuerbach in Gefangenschaft depressiv und versuchte sich zwei Mal das Leben zu nehmen.

1828 zurück nach Erlangen, wo er nach der Besserung seines Gesundheitszustandes wiederum als Gymnasiallehrer arbeiten konnte.

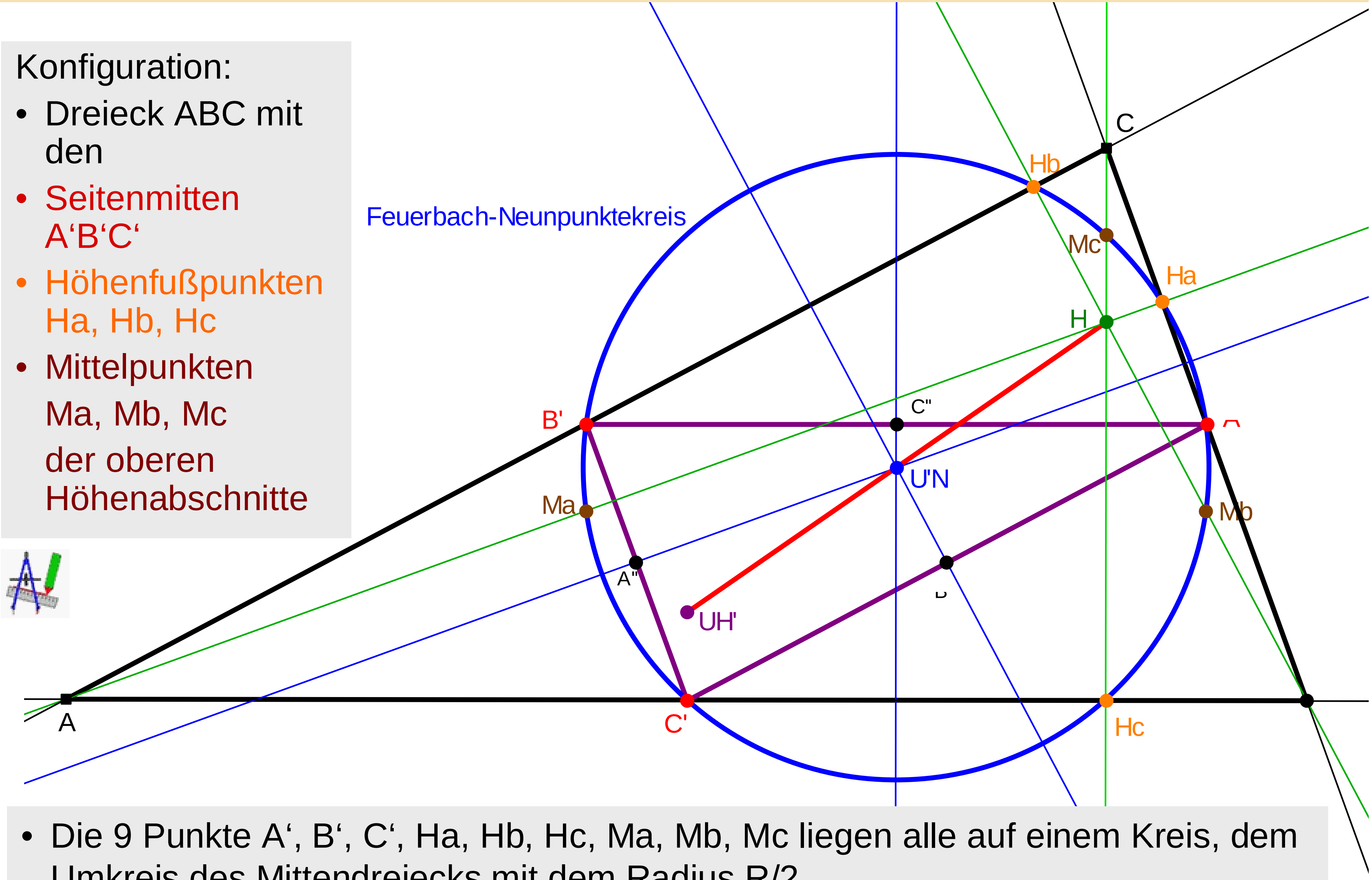
Als er "[e]ines Tages [...] mit gezogenem Schwert vor seine Schulklasse [trat] und drohte, jedem den Kopf abzuschlagen, der die an der Tafel stehenden Gleichungen nicht lösen könnte" wurde er gezwungen seine Stellung aufzugeben.

Im Alter von 34 Jahren starb Karl Wilhelm Feuerbach nach sechs weiteren Jahren der geistigen Verwirrung in Erlangen.

Der Feuerbachsche Neunpunktekreis

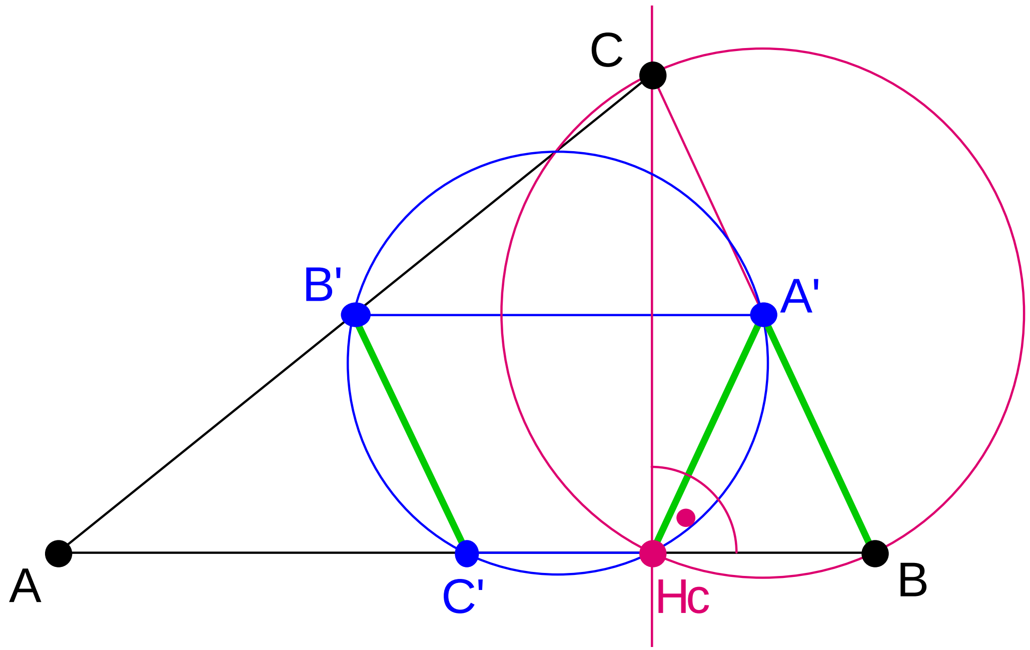
Konfiguration:

- Dreieck ABC mit den
- Seitenmitten A‘B‘C‘
- Höhenfußpunkten Ha, Hb, Hc
- Mittelpunkten Ma, Mb, Mc der oberen Höhenabschnitte



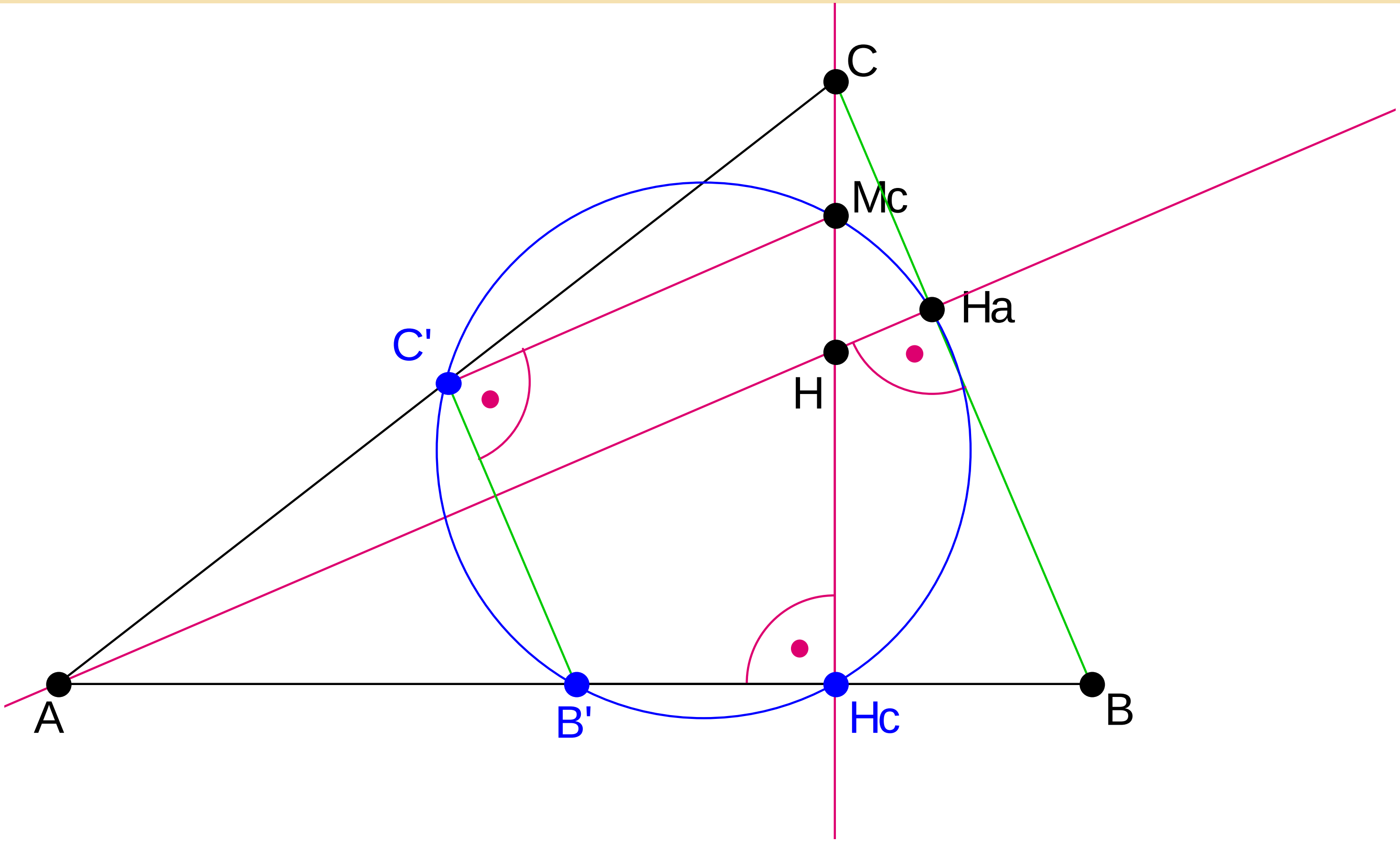
- Die 9 Punkte A‘, B‘, C‘, Ha, Hb, Hc, Ma, Mb, Mc liegen alle auf einem Kreis, dem Umkreis des Mittendreiecks mit dem Radius R/2.
- Der Mittelpunkt U‘ dieses Kreises ist der Mittelpunkt der Euler-Strecke [UH].

Feuerbachscher Neunpunktekreis – Beweis für den Höhenfußpunkt H_C



[B'C'] ist als Mittelparallele halb so lang wie die Grundlinie [BC] des Dreiecks ABC.
Also ist [B'C'] genau so lang wie [A'B].
Da das Dreieck BCH_c bei H_c rechtwinklig ist, liegt der Höhenfußpunkt H_c auf dem Thaleskreis über der Hypotenuse [BC].
Folglich ist [A'H_c] als Radius auch genau so lang wie [A'B].
Also ist das Trapez $A'B'C'H_c$ gleichschenklig.
Deshalb ergänzen sich gegenüberliegende Winkel zu 180°.
Das Trapez $A'B'C'H_c$ ist also ein Sehnenviereck und besitzt als solches einen Umkreis, auf dem insbesondere H_c liegt.
Dieser Umkreis enthält die Seitenmitten A', B', C', ist also der Neunpunktekreis.

Feuerbachscher Neunpunktekreis – Beweis für den Höhenfußpunkt H_C

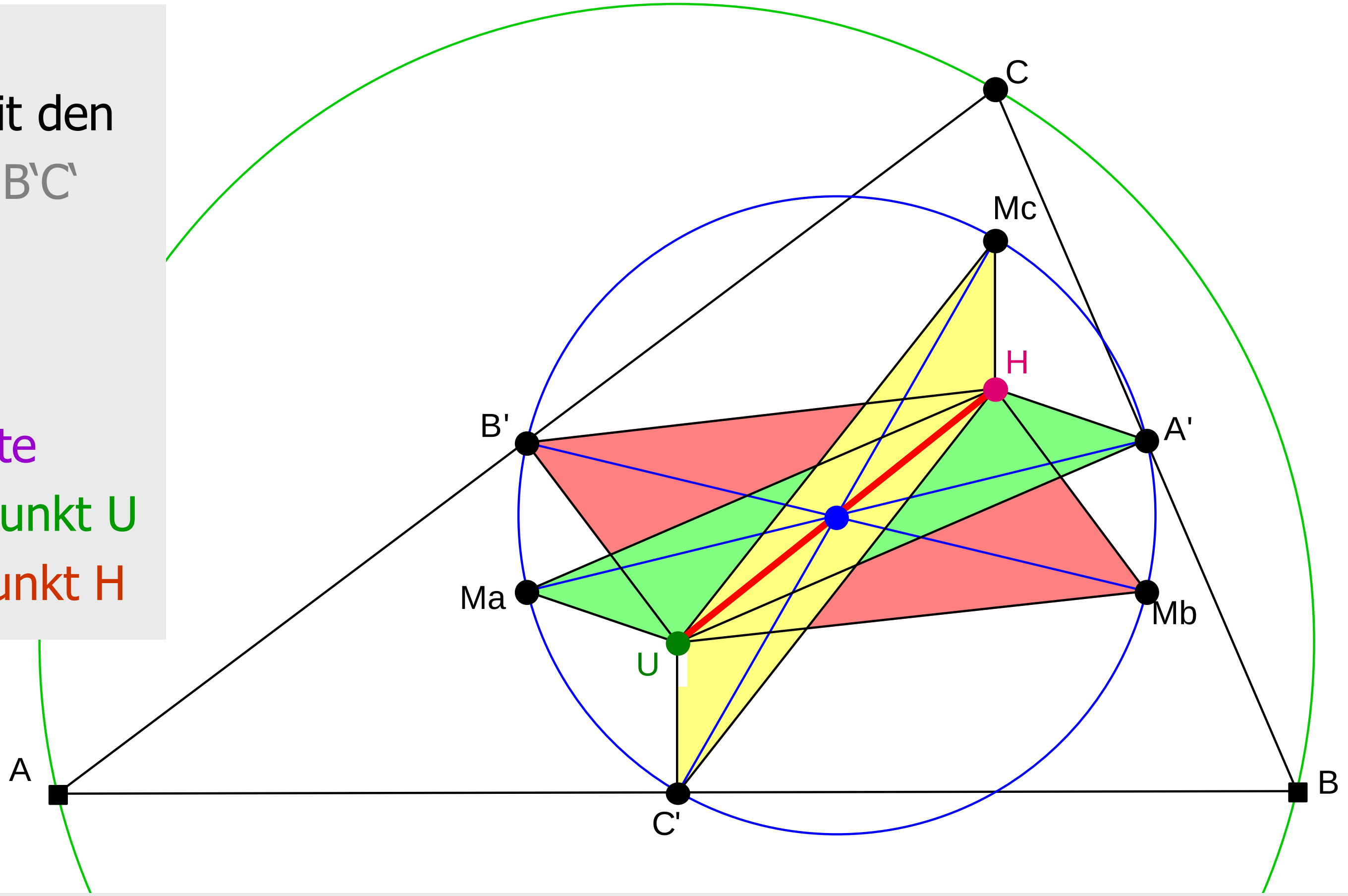


M_c ist der Mittelpunkt von [HC] und C' die Seitenmitte von [AC].
Deshalb ist [C'M_c] Mittelparallele des Dreiecks AHC, also parallel zur Höhe [AH_a].
[C'M_c] steht damit senkrecht auf der Mittelparallelen [C'B'], die ja parallel zu [BC] ist.
Da diesem rechten Winkel bei C' ein 90°-Winkel bei H_c gegenüberliegt, ist das Viereck B'$H_c$$M_c$C' ein Sehnenviereck, besitzt also einen Umkreis.
Da B', C' und H_c auf diesem liegen, ist es der Neunpunktekreis.
Auf diesem liegt also auch M_c.

Drei Parallelogramme im Feuerbachschen Neunpunktekreis

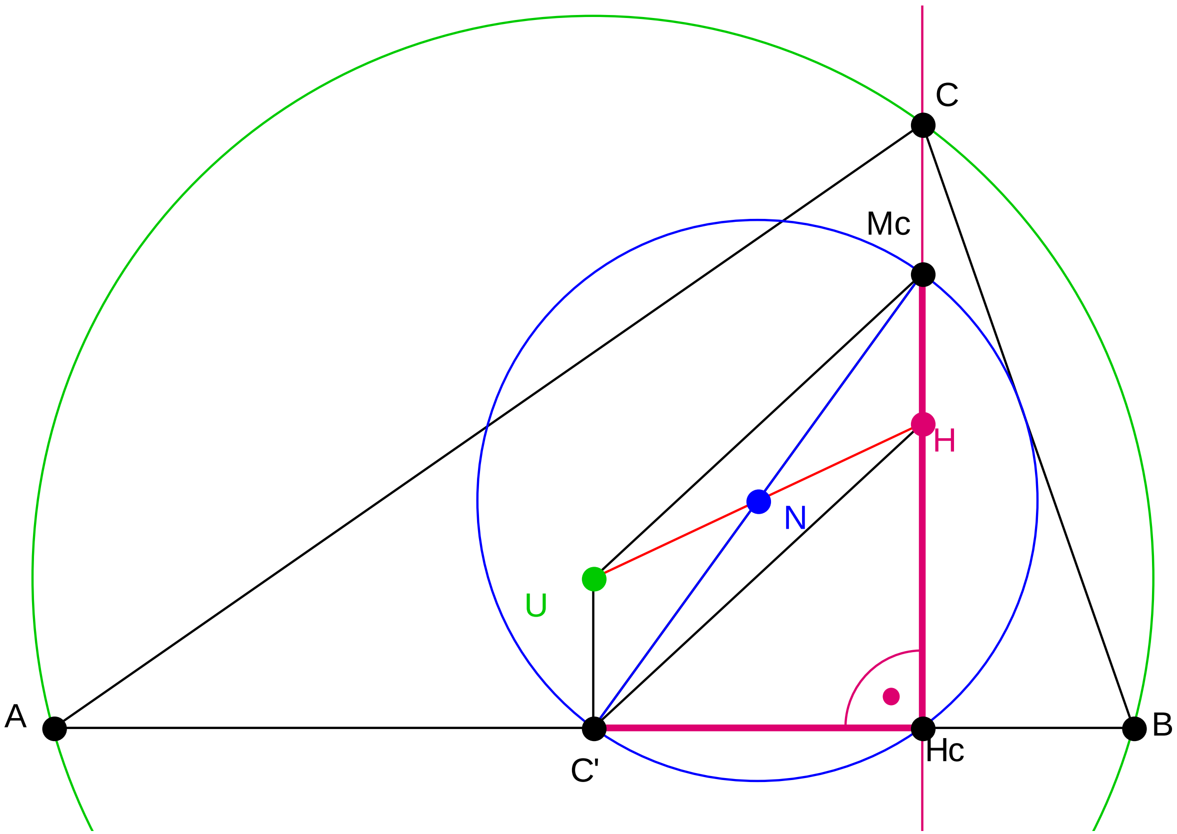
Konfiguration:

- Dreieck ABC mit den
- Seitenmitten A'B'C'
- Mittelpunkten
  Ma, Mb, Mc
  der oberen Höhenabschnitte
- Umkreismittelpunkt U
- Höhenschnittpunkt H



- Die Vierecke, die definiert sind durch den Umkreismittelpunkt, eine Seitenmitte, den Höhenschnittpunkt und den der Seitenmitte entsprechenden Mittelpunkt des oberen Höhenabschnitts, sind Parallelogramme.
- In jedem dieser Parallelogramm ist die Euler-Strecke eine Diagonale, die zweite Diagonale ist ein Durchmesser des Neunpunktekreises.

Drei Parallelogramme im Neunpunktekreis – Beweis für UC‘HM$_c$



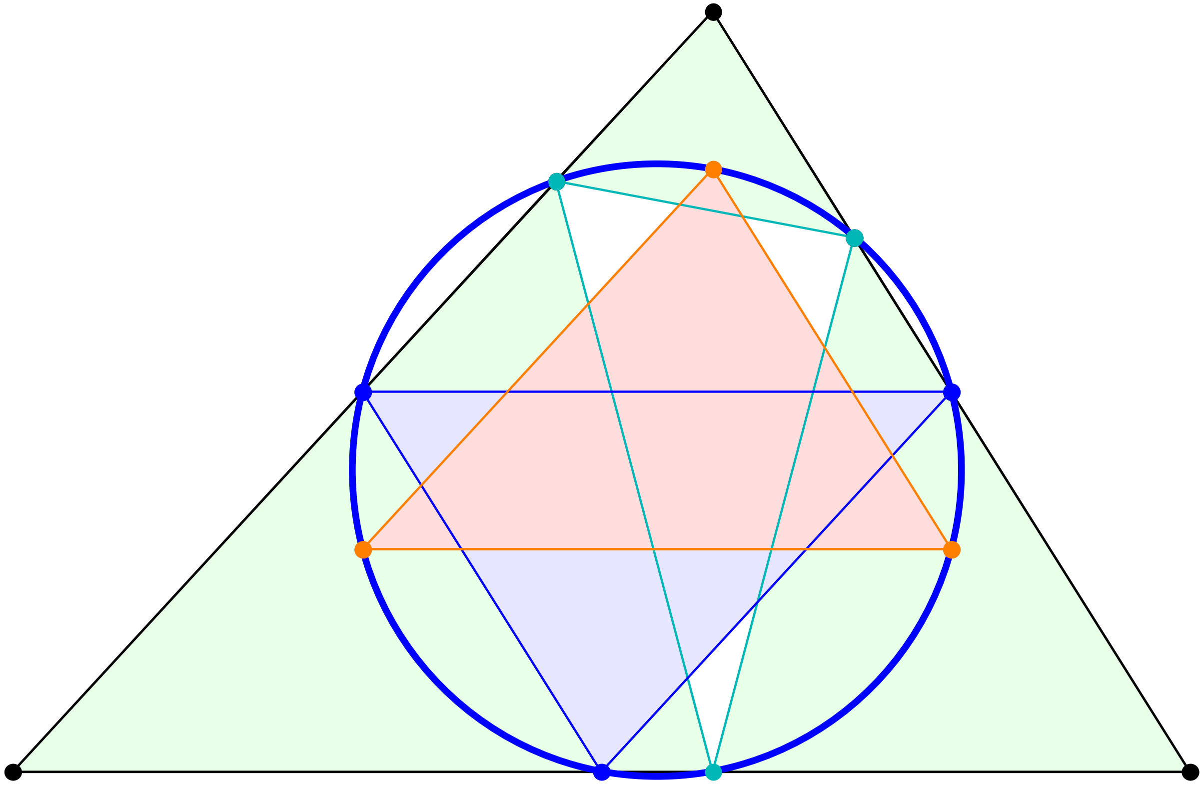
Die drei Punkte H$_c$, M$_c$ und C’ des Neunpunktekreises bilden ein bei H$_c$ rechtwinkliges Dreieck.

Nach dem Satz von Thales ist [C’M$_c$] deshalb ein Durchmesser des Neunpunktekreises mit dem Mittelpunkt N.

Der Mittelpunkt N des Neunpunktekreises halbiert auch die Euler-Strecke [UH].

Das Viereck UC’HM$_c$ ist also punktsymmetrisch bezüglich N, also ein Parallelogramm.

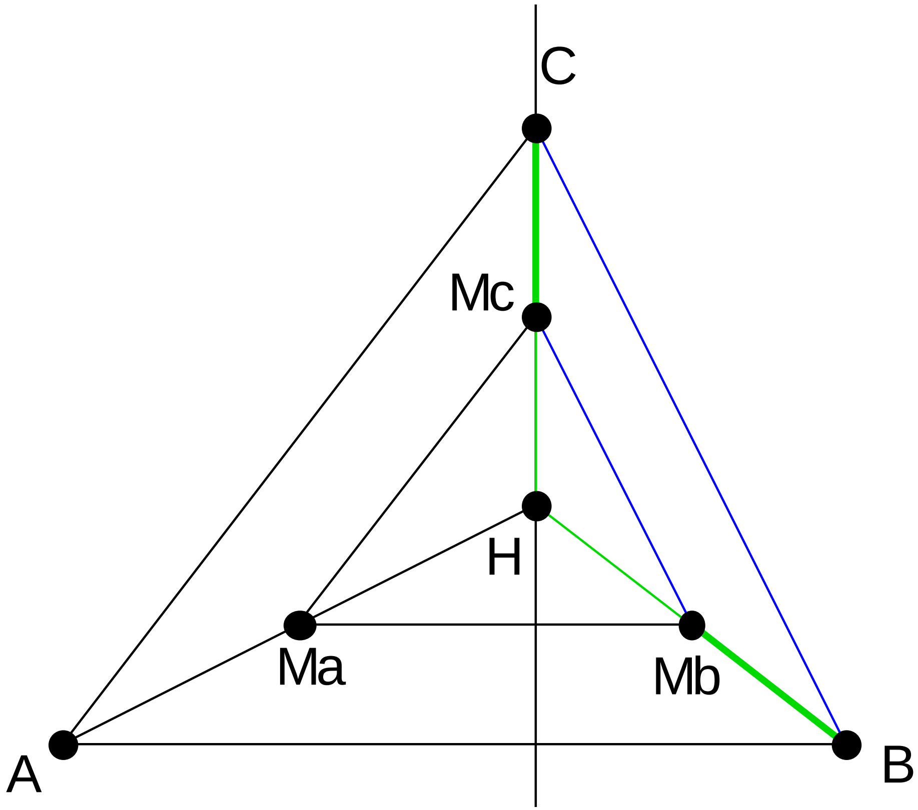
Fünf zum Dreieck ähnliche Dreiecke



Das **große Dreieck** ist ähnlich zu

- seinem Mittendreieck
- dem Dreieck, welches durch die Mittelpunkte der oberen Höhenabschnitte definiert ist.
- seinen drei Teildreiecken, in welche es durch das Höhenfußpunktdreieck zerlegt wird.

Fünf zum Dreieck ähnliche Dreiecke – Beweis 1

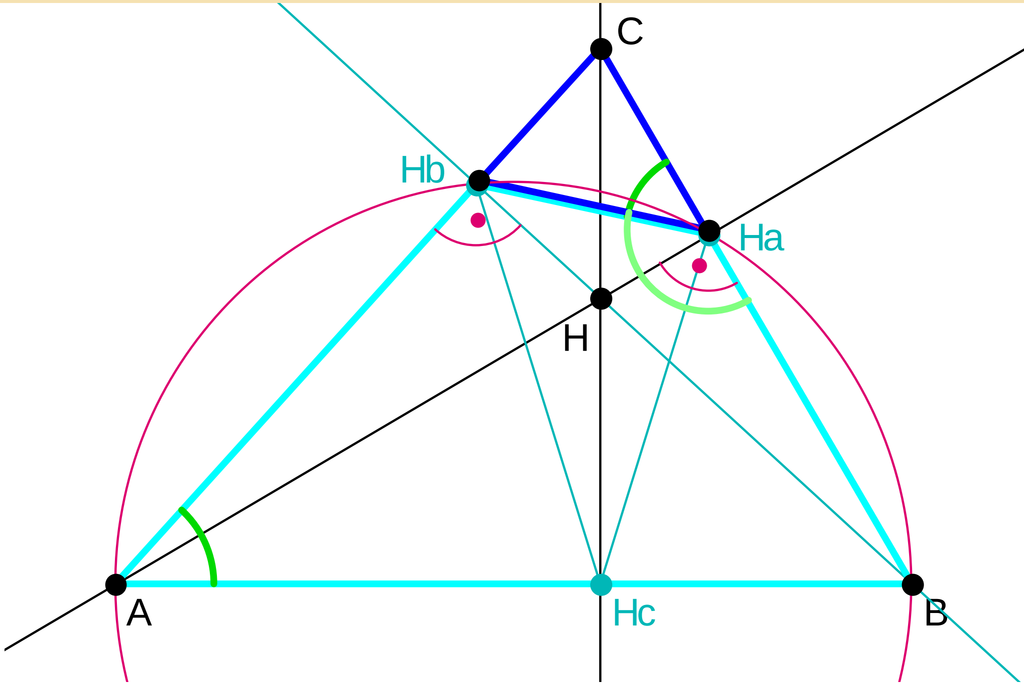


M_c und M_b sind die Mittelpunkte der Seiten [CH] und [BH] des Dreiecks BCH.

Deshalb ist die Verbindungsstrecke $[M_bM_c]$ die Mittelparallele des Dreiecks BCH.

Genauso verfährt man mit den übrigen Seiten der Dreiecke und weist so nach, dass das Dreieck $M_aM_bM_c$ ähnlich zum Dreieck ABC ist.

Fünf zum Dreieck ähnliche Dreiecke – Beweis 2



Wegen der rechten Winkel bei H_a und H_b liegen H_a und H_b auf dem Thaleskreis über [AB].

Deshalb ist ABH_aH_b ein Sehnenviereck und die gegenüberliegenden Winkel $\angle BAC$ und $\angle H_bH_aB$ ergänzen sich zu 180°.

Da sich auch die Nebenwinkel $\angle CH_aH_b$ und $\angle H_bH_aB$ zu 180° ergänzen, sind $\angle CH_aH_b$ und $\angle BAC$ kongruent.

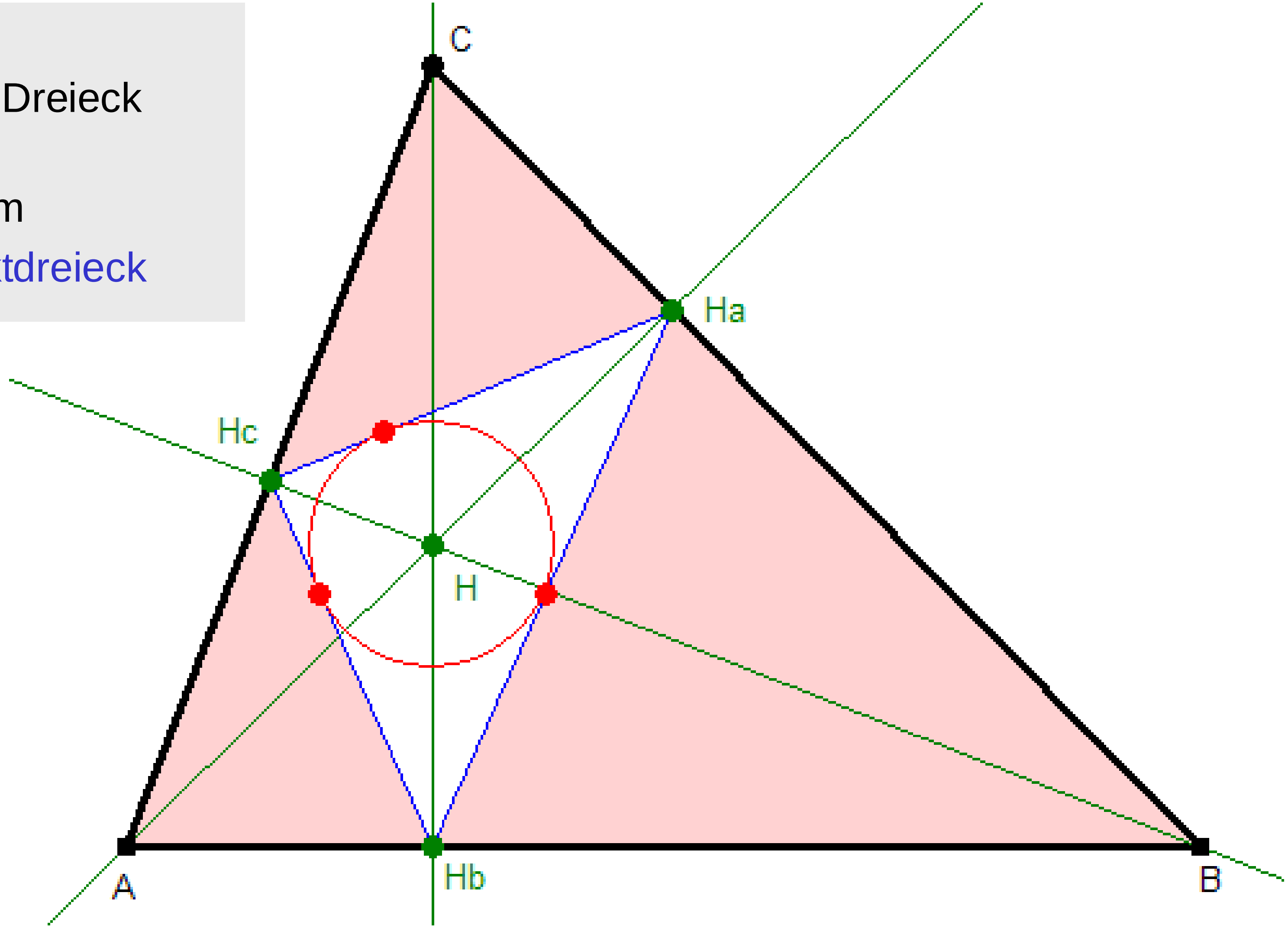
Genauso verfährt man mit $\angle CH_bH_a$ und $\angle CBA$.

Da die Dreiecke ABC und H_aH_bC in zwei Winkeln übereinstimmen, sind sie ähnlich.

Höhenfußpunktdreieck im spitzwinkligen Dreieck

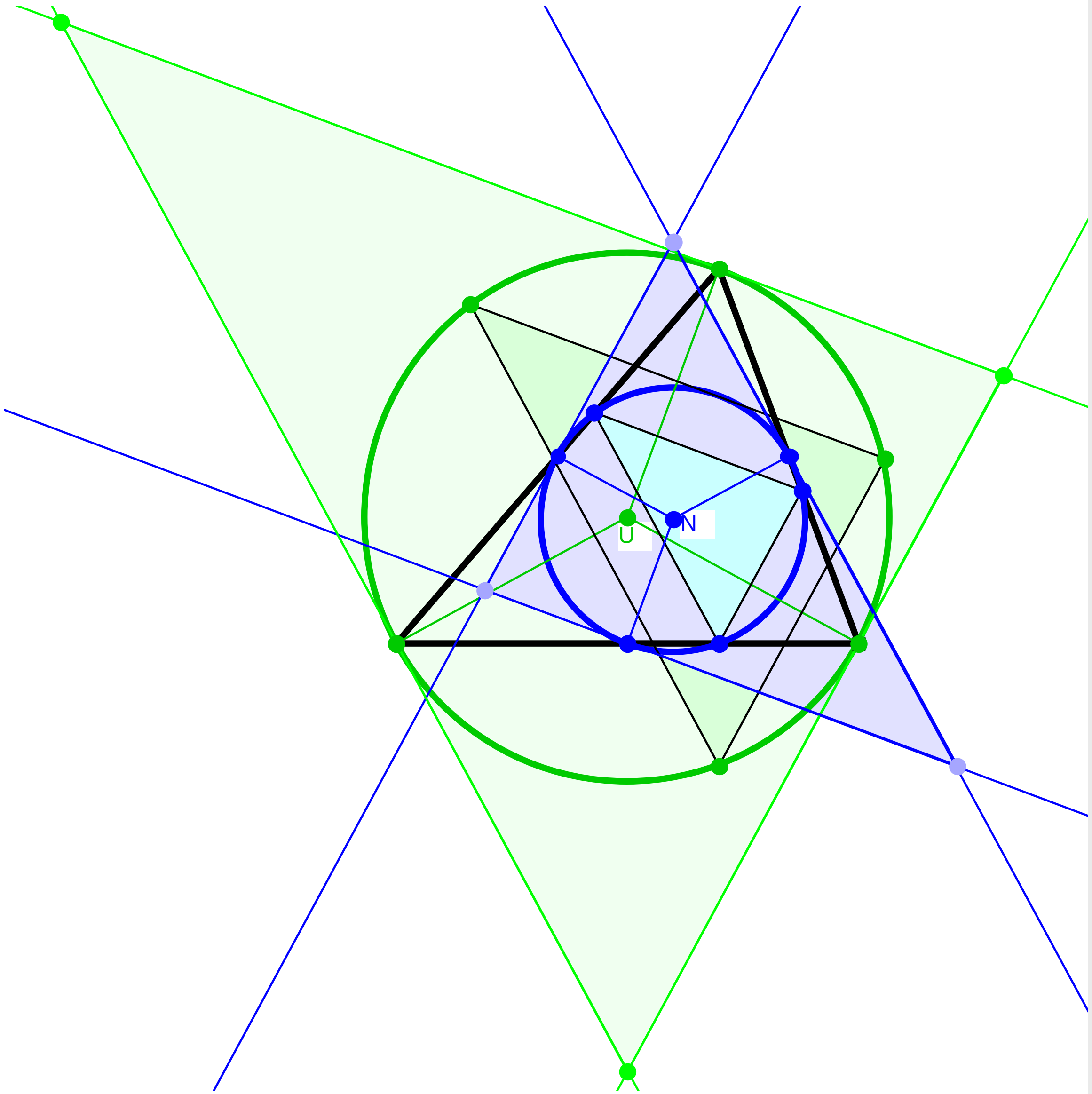
Konfiguration:

- Spitzwinkliges Dreieck ABC mit den
- Höhen und dem
- Höhenfußpunktdreieck



Im spitzwinkligen Dreieck ist der Höhenschnittpunkt H zugleich Inkreismittelpunkt des Höhenfußpunktdreiecks.

Drei zum Höhenfußpunktdreieck ähnliche Dreiecke



Das Höhenfußpunktdreieck ist ähnlich zu

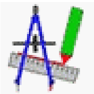
- dem Dreieck, welches durch die Spiegelpunkte des Höhenschnittpunkts an den Höhenfußpunkten definiert ist.

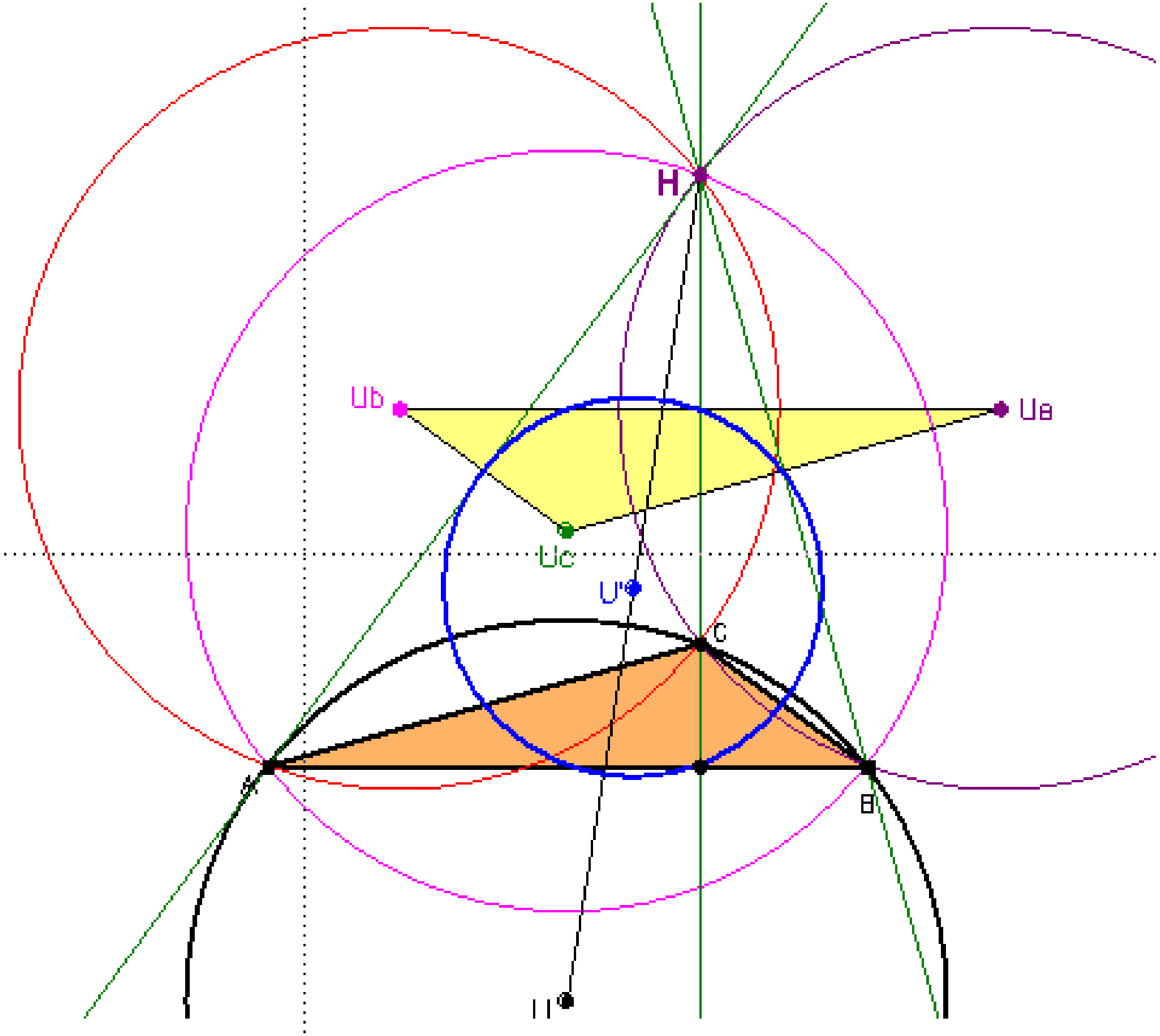
  Die Seiten dieses Dreiecks sind parallel zu den entsprechenden Seiten des Höhenfußpunktdreiecks und doppelt so lang wie diese.
- dem Dreieck, welches von den Tangenten an den Umkreis in den Eckpunkten des Dreiecks gebildet wird.
- dem Dreieck, welches durch die Tangenten an den Neunpunktekreis in den Seitenmitten des Dreiecks gebildet wird.

Die kongruenten Dreiecke und der Neunpunktekreis

Konfiguration:

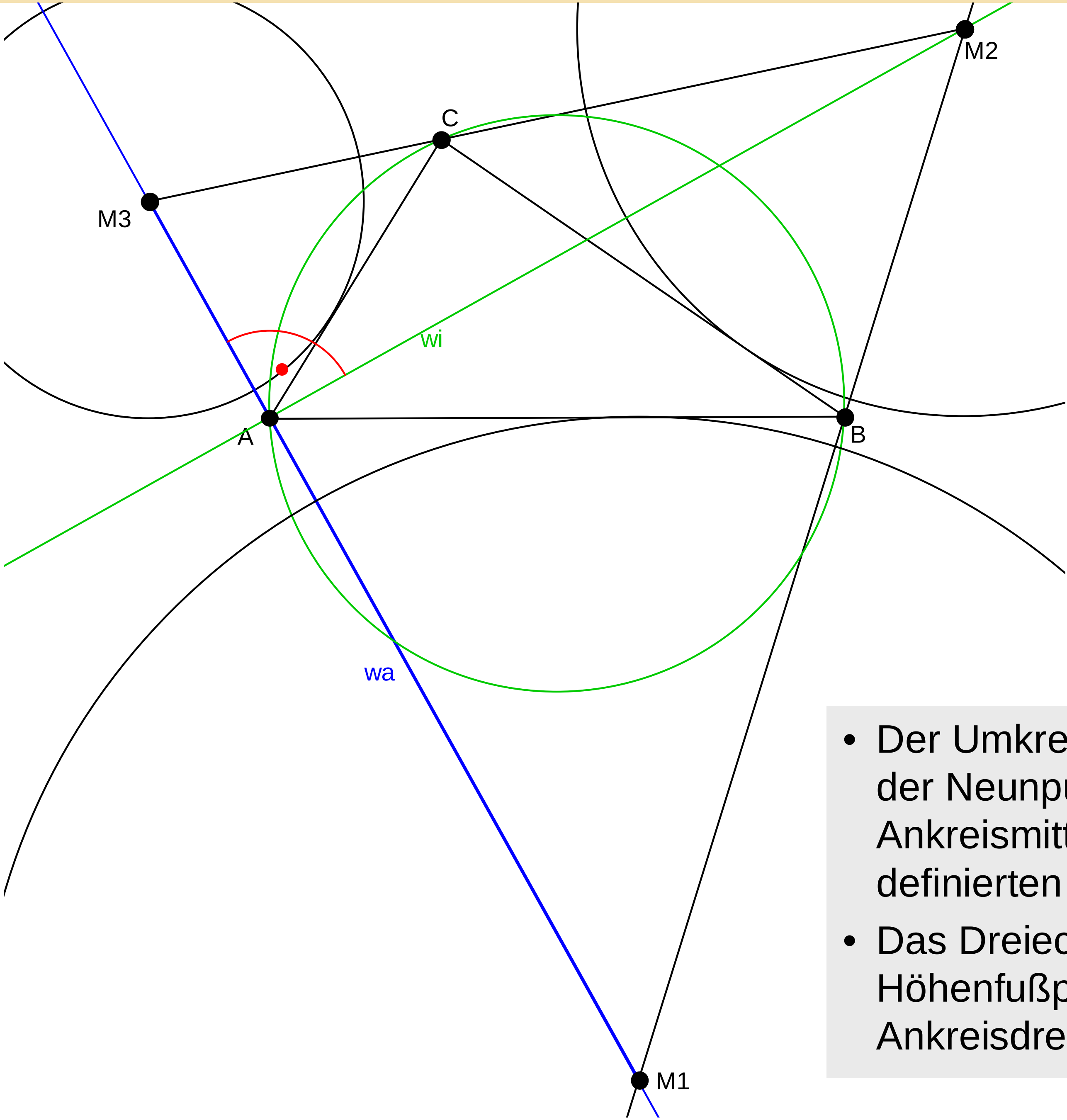
- Dreieck ABC mit dem
- Umkreismittelpunkt U
- die durch Spiegelung von U an den Dreieckseiten entstandenen Bildpunkte U_a, U_b, U_c





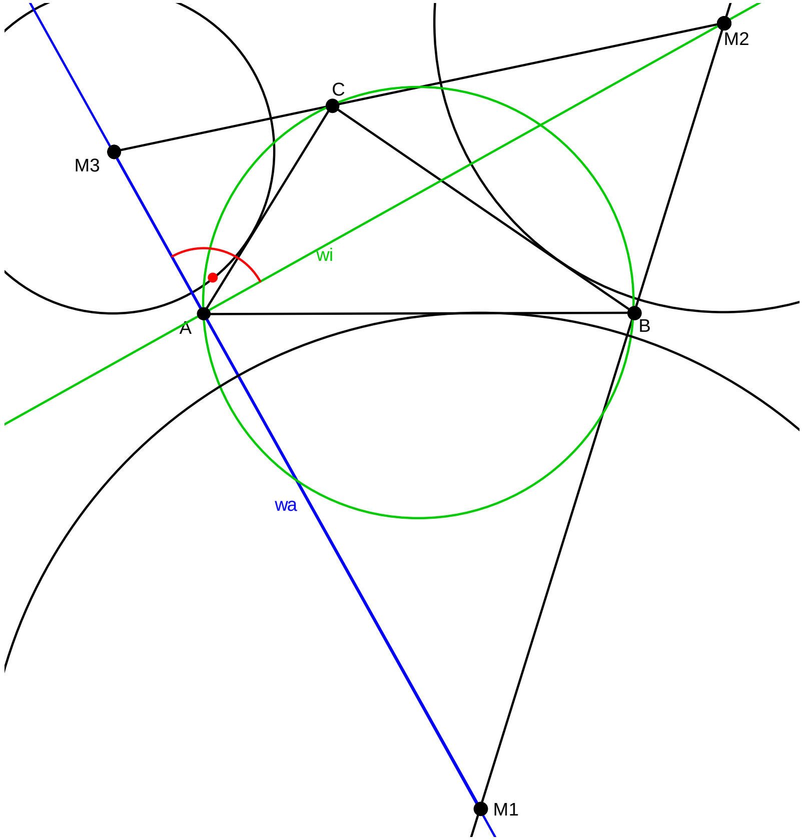
Das Dreieck $U_aU_bU_c$ geht aus dem Dreieck ABC durch Punktspiegelung am Mittelpunkt U‘ des Neunpunktekreises hervor.

Der Umkreis als Neunpunktekreis des Ankreisdreiecks



- Der Umkreis des Dreiecks ABC ist der Neunpunktekreis des durch die Ankreismittelpunkte $M_1M_2M_3$ definierten Ankreisdreiecks.
- Das Dreieck ABC selbst ist das Höhenfußpunktdreieck dieses Ankreisdreiecks.

Der Umkreis als Neunpunktekreis des Ankreisdreiecks - Beweis



Der Ankreismittelpunkt M_1 ist der Schnittpunkt der Außenwinkelhalbierenden $w_{\alpha a}$ und $w_{\beta a}$ und der Innenwinkelhalbierenden w_γ.

Der Ankreismittelpunkt M_3 ist Schnittpunkt von $w_{\alpha a}$, $w_{\gamma a}$ und w_β.

Folglich liegt die Seite $[M_1M_3]$ des Ankreisdreiecks auf $w_{\alpha a}$ und verläuft durch den Eckpunkt A des ursprünglichen Dreiecks.

Wir wissen, dass die Innenwinkelhalbierenden senkrecht auf den entsprechenden Außenwinkelhalbierenden stehen.

Folglich steht w_α auf $w_{\alpha a}$ senkrecht und verläuft ebenfalls durch den Punkt A.

Da der Mittelpunkt M_2 Schnittpunkt von $w_{\beta a}$, $w_{\gamma a}$ und w_α ist, verläuft diese Innenwinkelhalbierende w_α auch durch M_2 und enthält folglich die Höhe $[M_2A]$ des Ankreisdreiecks $M_1M_2M_3$.

Höhenfußpunkt ist A.

Analog verfährt man mit den anderen beiden Höhen des Ankreisdreiecks.

Der Umkreis des Dreiecks ABC enthält also alle drei Höhenfußpunkte des Ankreisdreiecks, ist also dessen Neunpunktekreis.

Der Satz von Feuerbach - Originalzeichnung

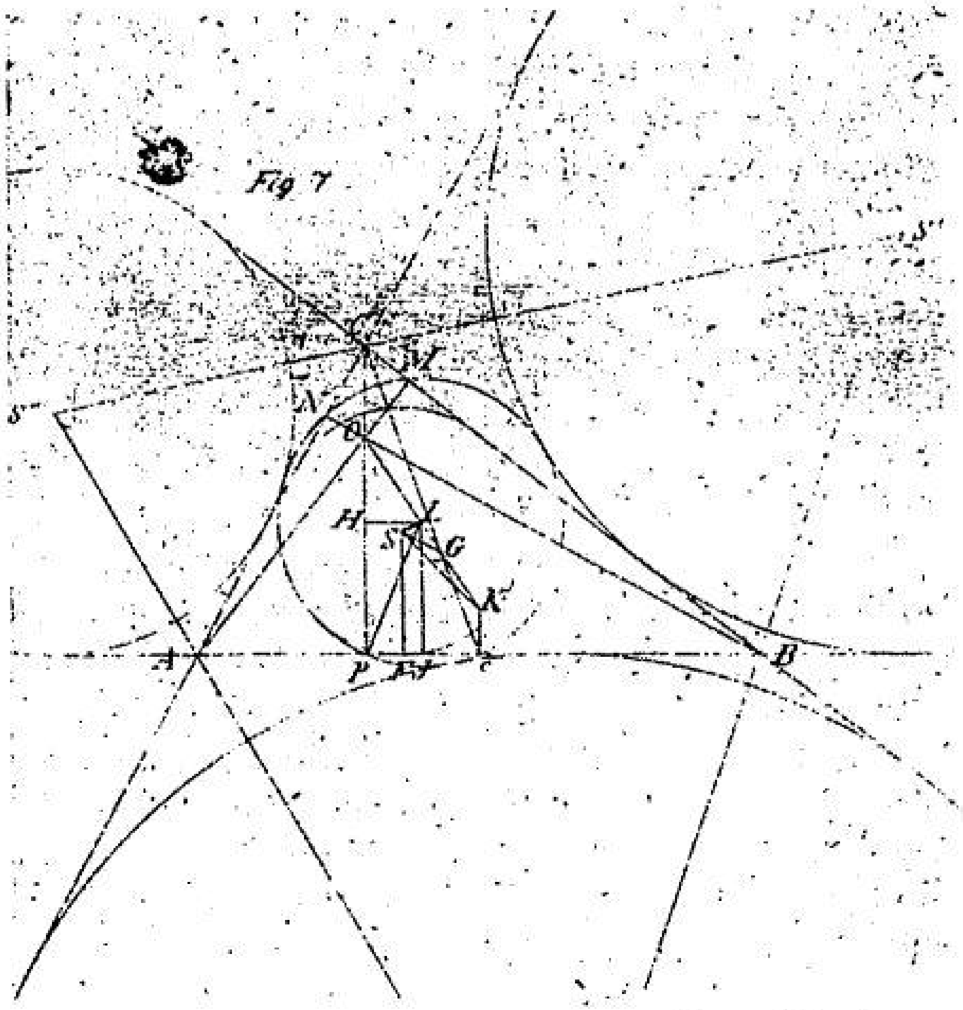
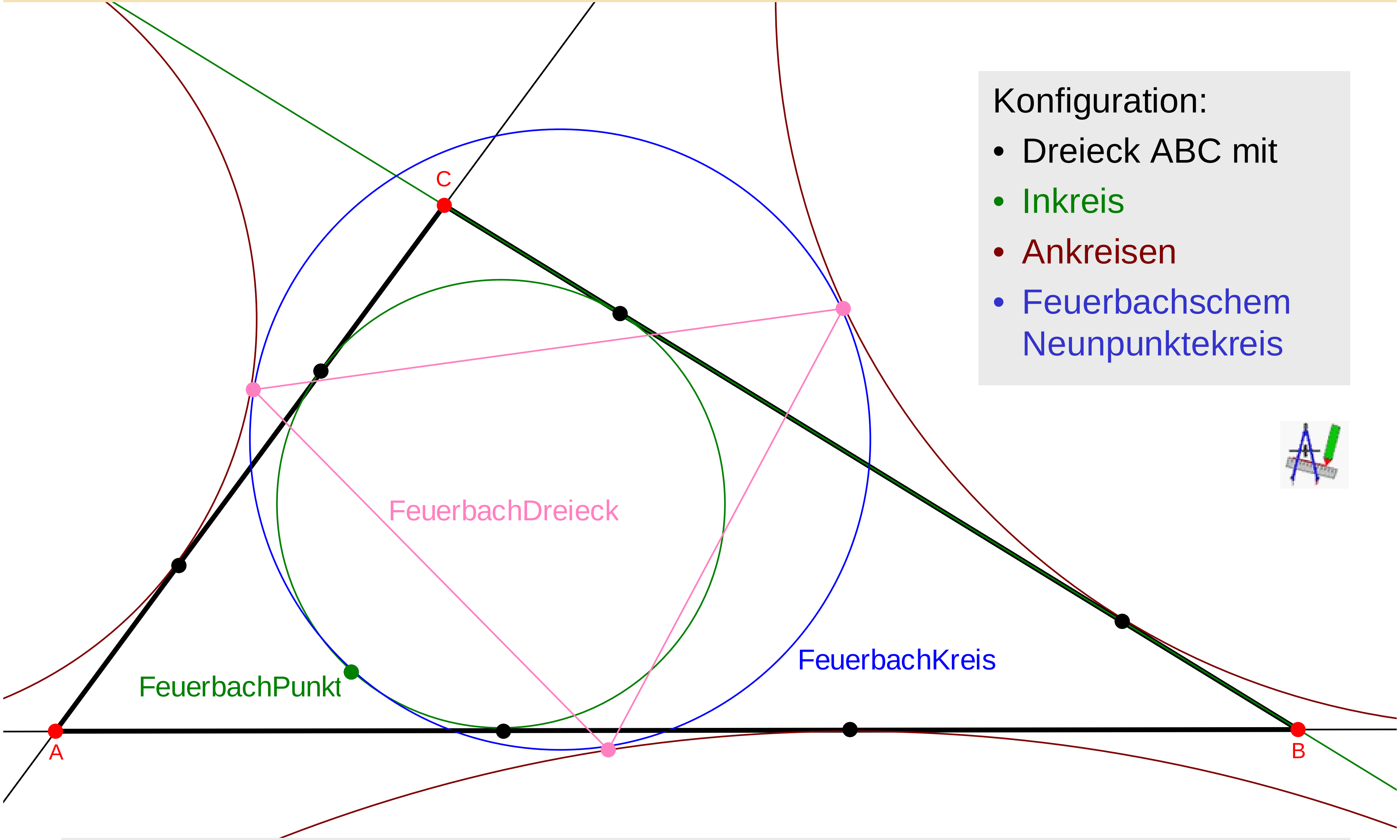


Diagram used in *Eigenschaften einiger merkwurdigen Punkte* ... to illustrate the theorem of Feuerbach. Note that three of the famous nine points, namely, the midpoints of the segments of the altitudes from the orthocenter to the vertices of the triangle, are not named on this diagram. [New York Public Library]

Satz von Feuerbach

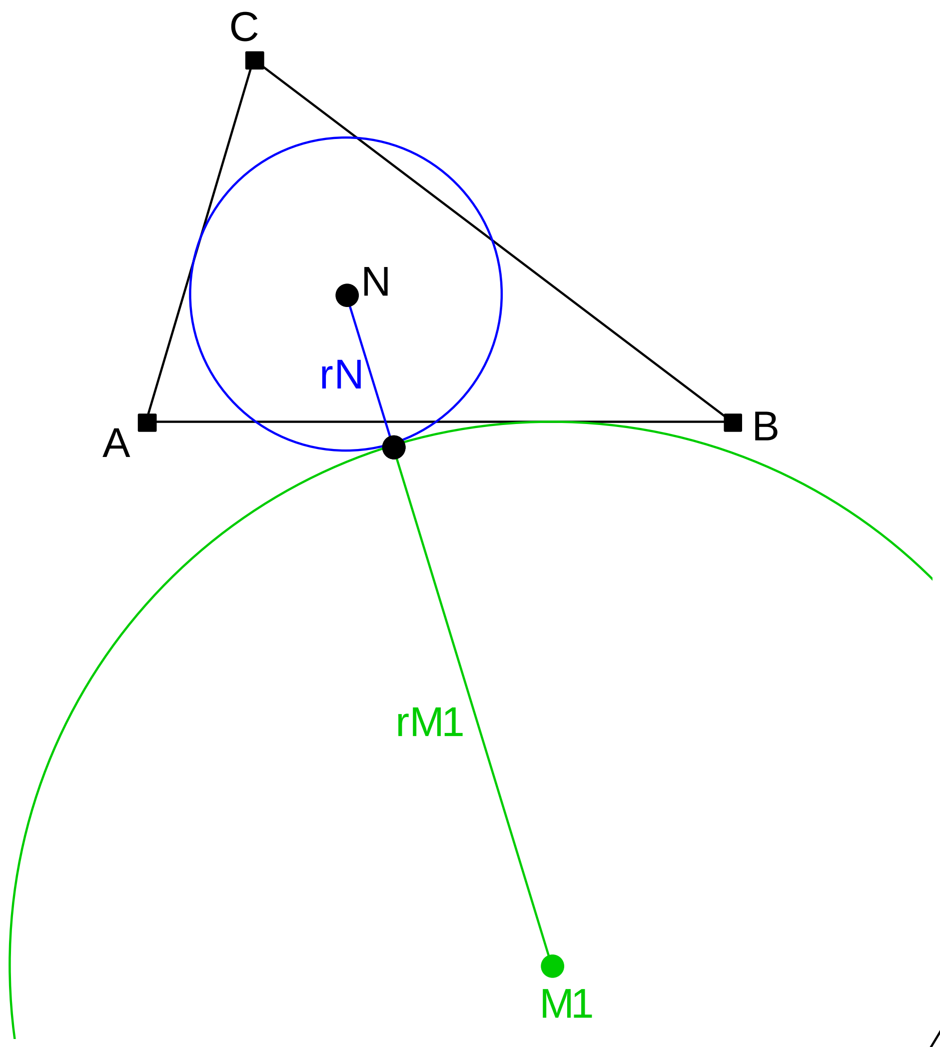


Konfiguration:

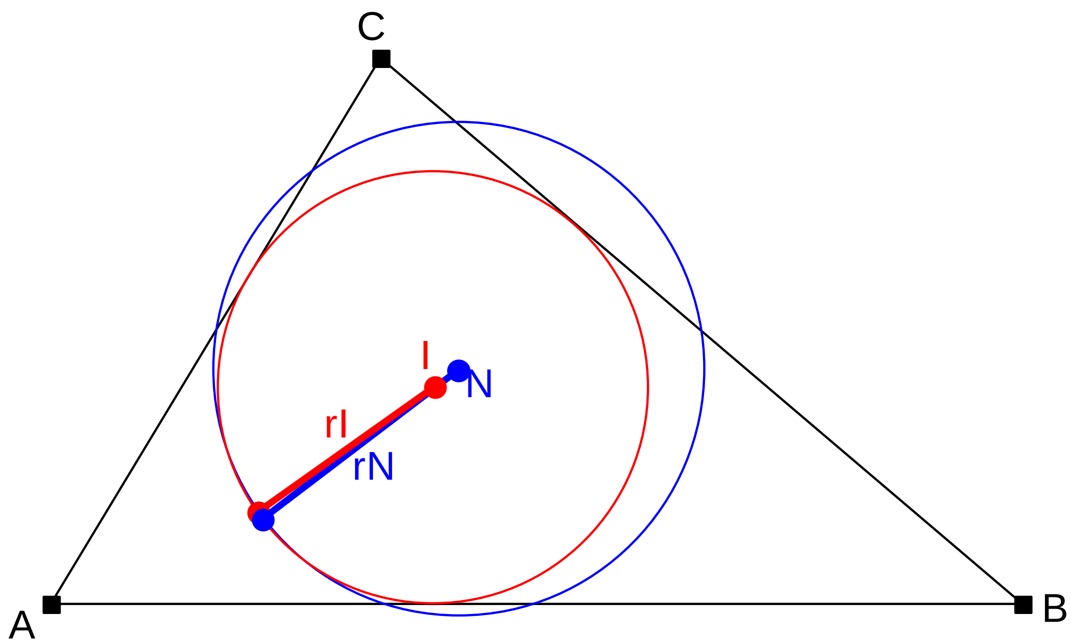
- Dreieck ABC mit
- Inkreis
- Ankreisen
- Feuerbachschem Neunpunktekreis

Der Feuerbachsche Neunpunktekreis eines Dreiecks berührt alle vier das Dreieck berührenden Kreise, also den Inkreis und die drei Ankreise.

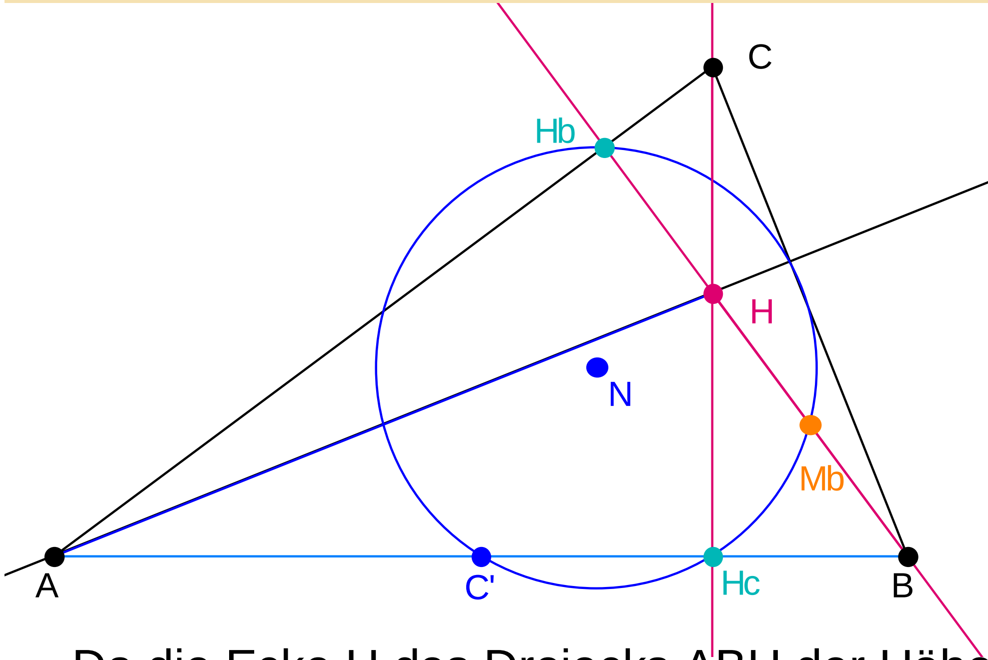
Satz von Feuerbach – Klassischer Beweis



Um zu beweisen, dass sich der Inkreis bzw. die Ankreise und der Neunpunktekreis berühren, kann man die beiden Feuerbach-Identitäten nachweisen.



Der Neunpunktekreis von Teildreiecken



Wenn man den Höhenschnittpunkt eines Dreiecks mit seinen drei Eckpunkten verbindet,

entstehen drei Teildreiecke,

die denselben Neunpunktekreis besitzen wie das Dreieck.

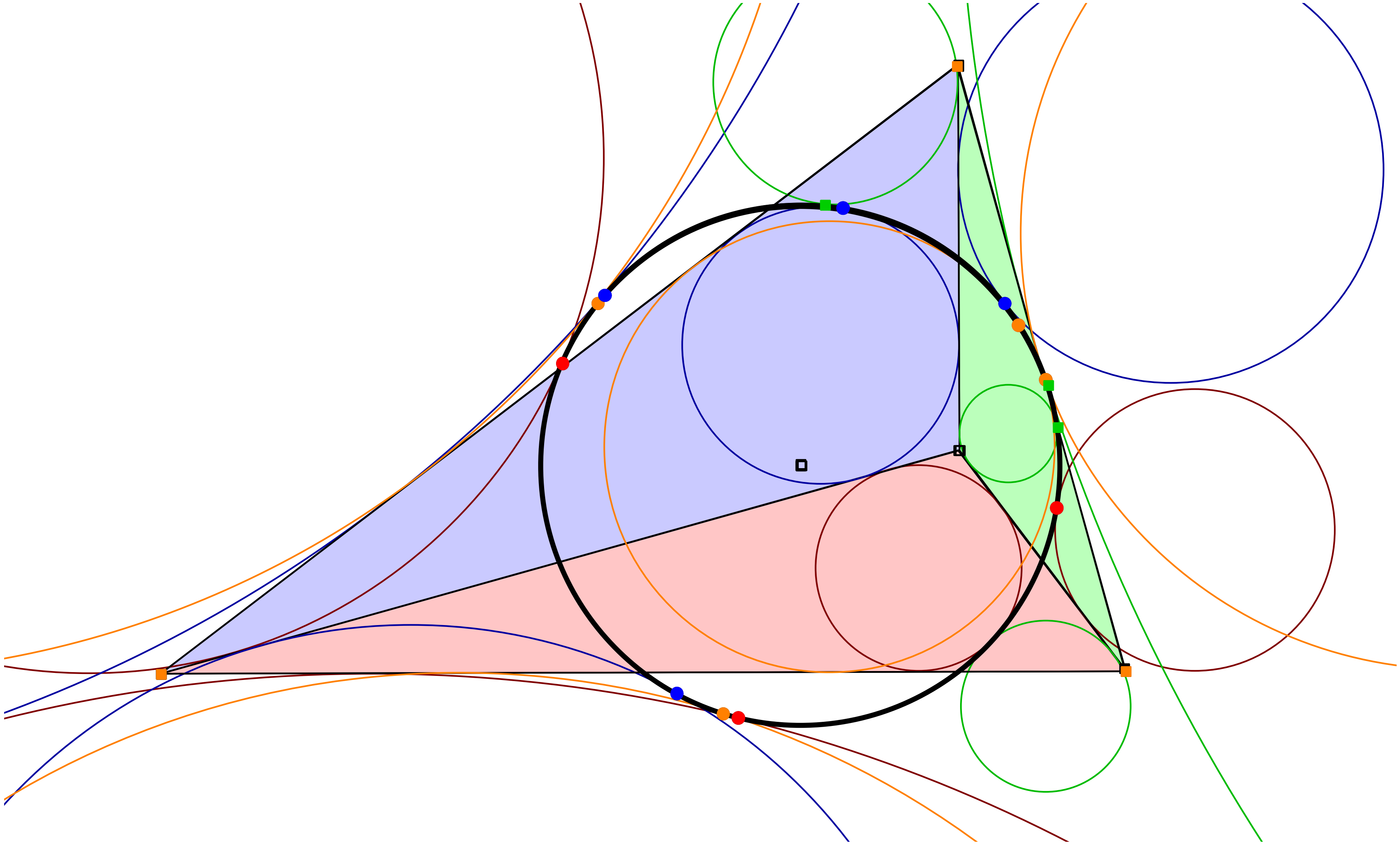
Da die Ecke H des Dreiecks ABH der Höhenschnittpunkt H des ursprünglichen Dreiecks ist, ist die Höhe des Dreiecks ABH eine Teilstrecke der Höhe h_c des Dreiecks. Somit besitzen beide denselben Höhenfußpunkt H_c.

Außerdem stimmt das Dreieck ABH mit dem Dreieck in der Seite [AB] und somit in der Seitenmitte C' überein.

Da der obere Höhenabschnitt zwischen H und der Ecke B mit der Seite [BH] des Dreiecks ABH identisch ist, ist der Mittelpunkt des oberen Höhenabschnitts des Dreiecks die Seitenmitte M_b des Dreiecks ABH.

Da die drei Punkte C', H_c und M_b jeweils den Neunpunktekreis der Dreiecke ABC und ABH eindeutig bestimmen, ist der Satz für das Teildreieck ABH bewiesen.

Der Neunpunktekreis und sechzehn Berührkreise



Aufgaben

Leitfaden zum Lösen von Aufgaben

nach **George Polyas** Leitfaden "Wie sucht man die Lösung?" in **Schule des Denkens,** Bern 1949

VERSTEHEN DER AUFGABE

- **Merke: Wenn Du eine Aufgabe nicht verstanden hast, kannst Du sie nicht lösen!**
- Was ist gegeben oder vorausgesetzt? Gibt es Bedingungen?
  Was ist gesucht, behauptet oder zu zeigen?
- Verstehst Du alle verwendeten Begriffe? Kläre sie!
  Blättere dazu im Schulheft oder im Buch einige Seiten zurück.
  Blicke ins Inhaltsverzeichnis des Buchs oder in ein Lexikon!
- Zeichne eine Figur! Führe passende Bezeichnungen ein!

Leitfaden zum Lösen von Aufgaben

nach **George Polyas** Leitfaden "Wie sucht man die Lösung?" in **Schule des Denkens,** Bern 1949

AUSDENKEN EINES PLANS

- **Merke: Erst denken, dann handeln!**

- Kennst Du die Aufgabe von früher?
  Oder eine ähnliche, in der die gleichen Begriffe vorkommen?
- Gibt es eine Formel die Du brauchen kannst?
- Kennst Du einen Satz, der Aussagen über die verwendeten Begriffe macht?
  Blättere dazu im Schulheft oder im Buch einige Seiten zurück.
  Sind die Voraussetzungen durch die Aufgabenstellung erfüllt?
  Was sagt der Satz im Rahmen der Aufgabe aus?
- Geh auf die Definition der verwendeten Begriffe zurück!
- Kommst Du weiter, wenn Du ein Hilfselement einführst?
  Kannst Du die Aufgabe etwas anders ausdrücken?
- Kannst Du die Aufgabe für einen Sonderfall lösen?
  Kannst Du einen Teil der Aufgabe lösen?
- Was kannst Du aus den Angaben folgern?
  Stehen die Folgerungen im Zusammenhang mit der Aufgabe?
- Hast Du alle Informationen (Daten, Voraussetzungen, Definitionen, Lehrsätze, Eigenschaften der Begriffe), die eine Rolle spielen, benutzt?

Leitfaden zum Lösen von Aufgaben

nach **George Polyas** Leitfaden "Wie sucht man die Lösung?" in **Schule des Denkens,** Bern 1949

AUSFÜHREN DES PLANS

- **Merke: Wenn Du keinen Plan hast,**
  brauchst Du gar nicht anzufangen!

- Kontrolliere jeden Schritt!
  Kannst Du deutlich sehen, dass der Schritt richtig ist?
  Überlege vor jeder Umformung, nach welcher Regel Du vorgehen musst!

RÜCKSCHAU

- **Merke: Wenn Du jetzt Rückschau hältst,**
  fällt Dir die nächste Aufgabe leichter!

- Kannst Du das Resultat kontrollieren?
  Kannst Du es in Sonderfällen anwenden?
- Kannst Du die Lösung jetzt auf einen Blick erkennen?
  Können manche Schritte abgekürzt werden?
- Kannst Du das Ergebnis für eine andere Aufgabe gebrauchen?

Aufgaben

Wende den **Satz von Ceva** und den **Satz von Stewart** an auf

- Seitenhalbierende
- Winkelhalbierende
- Höhen

Mittendreieck

- K ist der Mittelpunkt I' des Inkreises des Mittendreiecks.
- Der Inkreis des Mittendreiecks ist der Spiekersche Sechs-Tangenten-Kreis.

Feuerbachscher Neun-Punkte-Kreis

- Die Mittelpunkte der oberen Höhenabschnitte halbieren die Kreisbögen zwischen den Höhenfußpunkten.
- Der Neunpunktekreis schneidet die Dreiecksseiten unter den Winkeln $|\alpha-\beta|$, $|\beta-\gamma|$ und $|\gamma-\alpha|$.
- Das Dreieck ABC ist das Höhenfußpunktdreieck und der Umkreis des Dreiecks ABC ist der Neunpunktekreis des Dreiecks $I_aI_bI_c$, das von den Mittelpunkten der Ankreise gebildet wird.

Euler-Geraden

- Die Punkte U=H', S=S', U' und H liegen harmonisch auf der (ersten) Euler-Geraden.
- Die Punkte I=N', S=S', K=I' und N liegen harmonisch auf der zweiten Euler-Geraden.
- In jedem Dreieck bilden die Punkte H, N, U, I ein Trapez, dessen Diagonalen sich in S schneiden und gegenseitig im Verhältnis 2 : 1 teilen.
- Im gleichschenkligen Dreieck fallen die beiden Euler-Geraden zusammen, d.h. U, S, U', H, I, I'=K, N sind kollinear.
- Im gleichseitigen Dreieck fallen alle diese Punkte in S zusammen.
- Es gilt $UH^2 = 9R^2 - a^2 - b^2 - c^2$ und $\angle UCH = |\alpha-\beta|$

Höhenschnittpunkt

- Auf welcher Ortskurve bewegt sich der Höhenschnittpunkt eines Dreiecks ABC, wenn sich der Punkt C auf dem Umkreis des Dreiecks bewegt?
- Auf welcher Ortskurve bewegt sich der Höhenschnittpunkt eines Dreiecks ABC, wenn sich der Punkt C auf einer Parallelen zur Seite [AB] bewegt?