

Grundlegende Definitionen der Differentialrechnung

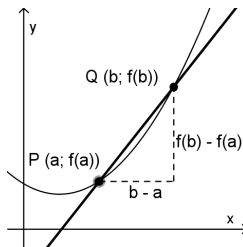
Sei die Funktion $f : x \mapsto f(x)$ im Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definiert und seien $a, b, x_0, x \in I$.

Dann gelten die folgenden Definitionen:

Definition 1 Die Steigung

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

der Sekante des Graphen von f durch die Graphenpunkte $P(a | f(a))$ und $Q(b | f(b))$ heißt *Differenzenquotient* oder *mittlere Änderungsrate von f im Intervall $[a; b]$* .



Definition 2 Wenn für die Funktion f an der Stelle x_0 der Grenzwert

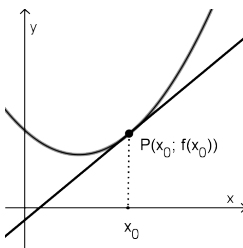
$$m_{x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

des Differenzenquotienten existiert,

- dann heißt dieser Grenzwert *Differentialquotient* oder *Ableitung* oder *lokale bzw. momentane Änderungsrate von f an der Stelle x_0* und man schreibt

$$m_{x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0)$$

- dann heißt die Funktion f *differenzierbar* oder *ableitbar an der Stelle x_0* .
- dann heißt die Gerade durch $P(x_0 | f(x_0))$ mit der Steigung m_{x_0} *Tangente an den Graphen G_f in P* .
- dann versteht man unter der *Steigung des Graphen G_f an der Stelle x_0 bzw. im Punkt $P(x_0 | f(x_0))$* die Steigung m_{x_0} der Tangente an den Graphen G_f in P .



Definition 3 Wenn die Funktion f für alle Werte x_0 aus dem Intervall I differenzierbar ist,

- dann heißt die Funktion f *differenzierbar auf I* und
- dann heißt die Funktion $f' : x \mapsto f'(x)$ *Ableitungsfunktion* oder kurz *Ableitung von f auf I* .

Definition 4 Wenn für eine Funktion F in der gemeinsamen Definitionsmenge von F und f gilt $F'(x) = f(x)$,

- dann heißt F *Stammfunktion von f* .

Sei $f : x \mapsto ax^2 + bx + c ; x \in \mathbb{R}$.

Dann ist der Differenzenquotient von f im Intervall $[x_0; x]$

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{(ax^2 + bx + c) - (ax_0^2 + bx_0 + c)}{x - x_0} \\ &= \frac{a(x^2 - x_0^2) + b(x - x_0) + (c - c)}{x - x_0} \\ &= \frac{a(x + x_0)(x - x_0) + b(x - x_0)}{x - x_0} \\ &= a(x + x_0) + b \end{aligned}$$

Der Grenzwert des Differenzenquotienten für $x \rightarrow x_0$ existiert und hat den Wert

$$\begin{aligned} m_{x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (a(x + x_0) + b) \\ &= a \cdot 2x_0 + b \\ &= 2ax_0 + b \\ &= f'(x_0) \end{aligned}$$

Die Funktion f ist deshalb an der Stelle x_0 differenzierbar und hat dort die Ableitung $f'(x_0) = 2ax_0 + b$

Die Steigung der Tangente an G_f und damit auch die Steigung des Graphen G_f an der Stelle x_0 sind $f'(x_0) = 2ax_0 + b$

Die Funktion $f : x \mapsto ax^2 + bx + c ; x \in \mathbb{R}$ ist differenzierbar auf \mathbb{R} und hat die Ableitungsfunktion $f' : x \mapsto 2ax + b ; x \in \mathbb{R}$.

Die Funktion $F : x \mapsto ax^2 + bx + c ; x \in \mathbb{R}$ ist Stammfunktion der Funktion $f : x \mapsto 2ax + b ; x \in \mathbb{R}$.

Beispiel für $a = 3, b = -4, c = 5$:

$$f(x) = 3x^2 - 4x + 5$$

$$f'(x) = 3 \cdot 2x - 4 = 6x - 4$$

An der Stelle $x_0 = 2$ ist

$$f(x_0) = f(2) = 9 \text{ und } f'(x_0) = f'(2) = 8$$

Die Steigung der Tangente an G_f und damit die Steigung von G_f im Punkt $P(2 | 9)$ hat also den Wert 8.