

## 1. Methode mit Fallunterscheidungen (sehr ausführlich):

Fall 1:

$$x^2 - 4x + 2 \geq 0 \quad (1)$$

Die Gleichung  $x^2 - 4x + 2 = 0$  besitzt die Lösungen  $2 - \sqrt{2}$  und  $2 + \sqrt{2}$ .

Das sind gleichzeitig die Nullstellen der Quadratfunktion  $f(x) = x^2 - 4x + 2, x \in \mathbb{R}$ .

Da deren Graph eine nach oben geöffnete Parabel ist, ist die Ungleichung (1) also erfüllt für  $x \in ]-\infty; 2 - \sqrt{2}] \cup [2 + \sqrt{2}; \infty[$

Im Fall 1, d.h. unter der Voraussetzung  $x \in ]-\infty; 2 - \sqrt{2}] \cup [2 + \sqrt{2}; \infty[$ , wird die Betragsungleichung  $|x^2 - 4x + 2| \leq 2$  zur Ungleichung  $x^2 - 4x + 2 \leq 2$  bzw.

$$x^2 - 4x \leq 0 \quad (2)$$

Die Gleichung  $x^2 - 4x = 0$  besitzt die Lösungen 0 und 4.

Das sind gleichzeitig die Nullstellen der Quadratfunktion  $f(x) = x^2 - 4x, x \in \mathbb{R}$ .

Da deren Graph eine nach oben geöffnete Parabel ist, ist die Ungleichung (2) also erfüllt für  $x \in [0; 4]$

Die Ungleichungen (1) und (2) sind erfüllt für alle  $x$  mit  $x \in ]-\infty; 2 - \sqrt{2}] \cup [2 + \sqrt{2}; \infty[$  und  $x \in [0; 4]$ , also für alle  $x \in ]0; 2 - \sqrt{2}] \cup [2 + \sqrt{2}; 4[$

Fall 2:

$$x^2 - 4x + 2 \leq 0 \quad (3)$$

Diese Ungleichung (3) ist nach den Überlegungen von Fall 1 erfüllt für

$$x \in [2 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2}]$$

Im Fall 2, d.h. unter der Voraussetzung  $x \in [2 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2}]$ , wird die Betragsungleichung  $|x^2 - 4x + 2| \leq 2$  zur Ungleichung  $-(x^2 - 4x + 2) \leq 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 \geq -2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 \geq 0$ , bzw.

$$(x - 2)^2 \geq 0 \quad (4)$$

Diese Ungleichung (4) für alle  $x \in \mathbb{R}$  erfüllt.

Die Ungleichungen (3) und (4) sind erfüllt für alle  $x$  mit  $x \in [2 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2}]$  und  $x \in \mathbb{R}$ , also für alle  $x \in ]0; 2 - \sqrt{2}] \cup [2 + \sqrt{2}; 4[$

Die Betragsungleichung  $|x^2 - 4x + 2| \leq 2$  wird also erfüllt für  $x \in ]0; 2 - \sqrt{2}] \cup [2 + \sqrt{2}; 4[$  oder  $x \in ]0; 2 - \sqrt{2}] \cup [2 + \sqrt{2}; 4[$ , also für  $x \in [0; 4]$ .

## 2. Methode ohne Fallunterscheidungen (sehr ausführlich)

$$|x^2 - 4x + 2| \leq 2$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq x^2 - 4x + 2 \leq 2$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x^2 - 4x + 4 \leq 4$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (x - 2)^2 \leq 4$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq |x - 2| \leq 2$$

$$\Leftrightarrow |x - 2| \leq 2$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq x - 2 \leq 2$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x \leq 4$$

$$\Leftrightarrow x \in [0; 4]$$

Welche Methode ist die bessere?