Bakterienwachstum

Mathematische Schwerpunkte:

Teil 1: Folgen; *vollständige Induktion*; rekursiv definierte Folgen

Teil 2: Exponentialfunktionen

Teil 3: Extremwertbestimmung; Integration einer rationalen Funktion mittels reeller Partialbruchzerlegung; Grenzwertbestimmung; Zusatzaufgabe: Zeichnen mit mathematischer Software

Unter anderem relevant für folgende Studienfächer: Lebensmitteltechnologie, Biotechnologie

Aufgabenstellung: In dieser Aufgabe wird das Wachstumsverhalten von Bakterien, die sich durch Zellteilung vermehren, untersucht. Das Wachstum ist in verschiedene Phasen unterteilt. Zunächst passen sich die Bakterien dem umgebenden Milieu an und bereiten die folgende Wachstumsphase vor. In dieser vermehren sich die Bakterien durch Zellteilung, wobei unter anderem Bakterienart und Umweltbedingungen die Dauer eines Vermehrungszyklus beeinflussen. Durch das geringer werdende Nährstoffangebot und durch die Zunahme giftiger Stoffwechselprodukte verzögert sich die Teilungsrate, bis das Wachstum stagniert und die Bakterien schließlich absterben. Trägt man die Anzahl der Bakterien (evtl. pro Flächen- oder Volumeneinheit) über der Zeit auf, ergibt sich eine charakteristische Wachstumskurve, wie in Abbildung 1.

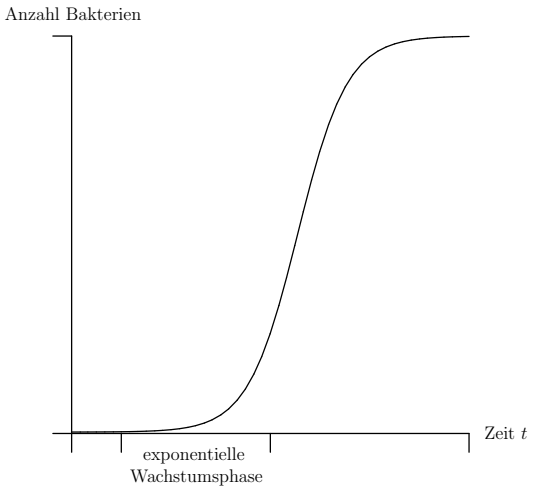

Abbildung 1: Wachstumskurve einer Bakterienkultur

Wir werden die Modelle des *exponentiellen* und des *logistischen Wachstums* zur Beschreibung des Wachstumsverhaltens untersuchen.

Teil 1

Themen:

a) Darstellung von Werten durch Wertetabelle und Diagramm;
b) Bestimmung der expliziten Darstellung von Gliedern einer Folge und Beweis mittels *vollständiger Induktion*;
c) Grenzwerte und Monotonieverhalten rekursiv definierter Folgen; *vollständige Induktion*

Abgabetermin: 26.05.2008 - 30.05.2008

a) Wir wollen eine Formel für die exponentielle Wachstumsphase herleiten und betrachten dazu folgenden Fall: In einer Nährlösung befinden sich 3 Bakterien pro Milliliter, und deren Vermehrungszyklus durch Zellteilung dauert unter den gegebenen Laborbedingungen 68 Minuten.
Aufgabe: Stellen Sie eine Wertetabelle auf, in der Sie die Anzahl der Bakterien in Abhängigkeit von der Zeit (in Einheiten von 68 Minuten) darstellen, und veranschaulichen Sie die Wertetabelle in einem Diagramm.

Punkte: 2
(1+1)

b) Wir bezeichnen die Populationsgröße zum Zeitpunkt t_n mit A_{t_n}, wobei t_n die Zeit in Vielfachen von 68 Minuten ist.
Aufgabe: Finden Sie für die Anzahl der Bakterien A_{t_n} eine explizite Formel in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie die Formel mittels *vollständiger Induktion*. Wie viele Bakterien befinden sich nach 17 Stunden in einem Milliliter Nährlösung?
Hinweis: Stellen Sie eine Wertetabelle mit den Einträgen n, t_n und A_{t_n} auf.

Punkte: 4
(1+2+1)

c) Der Zusammenhang zwischen zwei aufeinander folgenden Werten für die Populationsgröße $A_{t_{n+1}}$ und A_{t_n} besteht in der Verdopplung. Mit dem Anfangswert $A_{t_0} = 3$ haben wir die rekursiv definierte Folge

$$A_{t_0} = 3; \quad A_{t_{n+1}} = 2A_{t_n} \text{ für } n \in \mathbb{N}$$

gegeben.
Das logistische Wachstumsmodell, mit dem wir uns in Teil 3 dieser Aufgabe eingehender beschäftigen werden, stellt einen anderen Zusammenhang her zwischen den Populationsgrößen N_n und N_{n+1}, die in gleichen Zeitintervallen gemessen bzw. vorhergesagt werden. Man erhält die rekursiv definierte

Folge:

$$N_0 \in \mathbb{N}\backslash\{0\}; \quad N_{n+1} = N_n + KN_n(G - N_n) \text{ für } n \in \mathbb{N}$$

mit den Konstanten $G \in \mathbb{N}; G > N_0$ und $K \in \mathbb{R}; 0 < K < \frac{1}{G}$.
Aufgabe: Zeigen Sie, dass die Folgen A_{t_n} und N_n streng monoton steigend sind und berechnen Sie die Grenzwerte der Folgen.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst mittels *vollständiger Induktion*, dass sowohl $A_{t_n} > 0$ als auch $N_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
Setzen Sie $N_n < G$ für alle $n \in \mathbb{N}$ voraus, was aus den beiden Ungleichungen $G > N_0$ und $0 < K < \frac{1}{G}$ folgt.

Punkte: 4
(1+1+1+1)

Aufgabe: Beweisen Sie nun mit *vollständiger Induktion*, was Sie in der vorigen Aufgabe voraussetzen konnten: Aus $G > N_0$ und $K < \frac{1}{G}$ folgt $N_n < G$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Punkte: 2

Teil 2

Themen:

- d)-f) Exponentialfunktionen und deren Basiswechsel und die Bedeutung der Konstanten;
- g) Modellierung des exponentiellen Wachstums durch charakteristische Eigenschaften der e-Funktion

Abgabetermin: 16.06.2008 - 20.06.2008

d) In Teil 1 dieser Aufgabe haben wir eine Formel für die Bakterienanzahl zu den diskreten Zeitpunkten $t_n = 68n$ (Minuten) hergeleitet:

$$A_{t_n} = 3 \cdot 2^n \text{ für } n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Die Funktion $A(t)$, die die Bakterienanzahl der hier betrachteten Bakterienkultur *zu jeder Zeit* $t \geq 0$ beschreibt, muss die Forderung

$$A(t + 68) = 2 \cdot A(t) \text{ für } t \geq 0 \tag{2}$$

erfüllen.
Aufgabe: Warum muss $A(t)$ Gleichung (2) erfüllen? Beschreiben Sie dazu in eigenen Worten, was die Forderung bedeutet.
Schreiben Sie $A(t)$ als Exponentialfunktion zur Basis 2, zeichnen Sie sie und zeigen Sie, dass sie die Forderung (2) erfüllt.
Wieviele Bakterien befinden sich nach 17 Stunden und 20 Minuten in 1ml Nährlösung?

Punkte: 5
(1+3+1)

e) In Aufgabenteil d) haben wir eine Darstellung der Bakterienanzahl in der Form

$$A(t) = A_0 2^{\frac{1}{T}t} \text{ für } t \geq 0$$

hergeleitet.
Aufgabe: Wofür stehen die Konstanten A_0 und T?
Hinweis: Setzen Sie 0 und $t + T$ für t in $A(t)$ ein.

Punkte: 1

f) Die übliche Darstellung einer Exponentialfunktion ist

$$c \cdot e^{kt} \text{ für } t \in \mathbb{R} \text{ mit Konstanten } c, k \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe: Schreiben Sie $A(t)$ aus Aufgabenteil e) in eine solche Exponentialfunktion zur Basis e um. Wie hängen c und k mit A_0 und T zusammen?

Hinweis: Die beiden Darstellungen der Exponentialfunktion müssen für alle $t \geq 0$ gleich sein, also auch speziell für $t = 0$ und $t = 1$.

Punkte: 3
(2+1)

g) In diesem Aufgabenteil wollen wir exponentielles Wachstum modellieren. Der Gedanke hinter diesem einfachsten Wachstumsmodell ist der, dass das Wachstum, also die Änderung einer Populationsgröße zu jedem Zeitpunkt t, proportional zur Populationsgröße $A(t)$ selbst ist:

$$A'(t) \propto A(t).$$

Das ist äquivalent zu

$$A'(t) = C \cdot A(t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R} \text{ mit einer Konstanten } C \in \mathbb{R}.$$

Die Proportionalitätskonstante C hängt unter anderem von der Spezies selbst ab. Da hier das Wachstum einer Population modelliert wird, ist C positiv. (Zerfallsprozesse lassen sich genauso modellieren; dann ist C negativ.) Kennt man zusätzlich den Bestand A_0 der Population zu einem gegebenen Zeitpunkt, der meist 0 gesetzt wird, hat man die Anfangsbedingung

$$A(0) = A_0 \text{ mit einer Konstanten } A_0 \in \mathbb{R}_+.$$

Aufgabe: Zeigen Sie, dass die Funktion

$$y(x) := \tfrac{1}{A_0} A\big(\tfrac{1}{C}x\big) \text{ mit } x \in \mathbb{R}$$

die Definition der Exponentialfunktion aus dem Vorlesungsskript erfüllt. Leiten Sie daraus $A(t)$ ab.
Hinweis: Die charakteristischen Eigenschaften der e-Funktion sind $y'(x) = y(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $y(0) = 1$.
Bestimmen Sie $A(t)$, indem Sie $\frac{1}{C}x$ gleich t setzen.

Punkte: 3
(2+1)

Teil 3

Themen:

h) Monotonieverhalten und Bestimmung des Funktionswertes an der Wendestelle der durch ihre Differentialgleichung implizit gegebenen logistischen Wachstumsfunktion;

i) Modellierung des logistischen Wachstums durch Integration, insbes. Integration einer rationalen Funktion mittels reeller Partialbruchzerlegung;

j) Grenzwertbestimmung;

k) Wendepunktsbestimmung;

Zusatzaufgabe: Zeichnen mit mathematischer Software

Abgabetermin: 30.06.2008 - 04.07.2008

h) Wir untersuchen das logistische Wachstum näher, das wir schon in Teil 1 dieser Aufgabe betrachtet haben, siehe dazu die **Mathematischen Erläuterungen**. Es ist ein weiteres Wachstumsmodell, das der Belgier Pierre-Francois Verhulst (1804 - 1849) im Jahre 1837 vorschlug. Es bezieht die Tatsache mit ein, dass ein Bestand $N(t)$ nicht unbeschränkt wachsen kann, weil Nahrungs- bzw. Platzmangel eintritt. Der Zuwachs pro Zeiteinheit ist geringer, je näher der Bestand dieser Kapazitäts- oder Bestandsgrenze G kommt, anders ausgedrückt, je kleiner $G - N(t)$ wird. Man nennt diese Differenz das Sättigungsmanko. Bei dem logistischen Wachstumsmodell macht man die Annahme, dass das Wachstum proportional zum Bestand $N(t)$ und dem Sättigungsmanko ist:

$$N'(t) \propto N(t)(G - N(t)).$$

Wir erhalten ein einfaches Wachstumsmodell mit beschränktem Wachstum:

$$N'(t) = K\,N(t)(G - N(t)) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

wobei die Konstanten $K, G \in \mathbb{R}_+$ so gewählt sind, dass $N(t) \in]0, G[$ gilt für alle $t \in \mathbb{R}$. Auch wenn wir N noch nicht explizit kennen, lassen sich einige Erkenntnisse über die Funktion aus der Differentialgleichung ableiten.
Aufgabe: Bestimmen Sie das Monotonieverhalten von N. Berechnen Sie die Populationsgröße zum Zeitpunkt t_0 des stärksten Wachstums. Wie groß ist das Wachstum zu diesem Zeitpunkt?
Hinweis: Formulieren Sie die Bedingung, die $N''(t_0)$ erfüllen muss, wenn N' zu dem Zeitpunkt t_0 ein Maximum hat. Berechnen Sie daraus mit Hilfe der Gleichung (3) den Wert von $N(t_0)$.

Punkte: 3
(1+1+1)

i) Jetzt wollen wir $N(t)$ explizit bestimmen. Dazu stellen wir die Differentialgleichung (3) formal um:

$$\frac{dN}{dt} = K \cdot N(t)(G - N(t)) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{dN}{N(t)(G - N(t))} = K\,dt.$$

Wir leiten davon mit der Anfangsbedingung $N(0) = N_0$ Gleichung (4) ab:

$$\int_{N_0}^{N(t)} \frac{1}{x(G-x)}\,dx = \int_0^t K\,ds. \tag{4}$$

Aufgabe: Berechnen Sie beide Integrale der Gleichung (4) und berechnen Sie daraus die Funktion $N(t)$.
Hinweis: Lösen Sie das linke Integral mittels Partialbruchzerlegung. Achten Sie auf Vorzeichen beim Auflösen von Beträgen.

Punkte: 5
(3+2)

j) Die Funktion aus Aufgabenteil g) lässt sich in die Form

$$N(t) = \frac{G}{1 + e^{r(t-b)}} \text{ für } t \in \mathbb{R} \tag{5}$$

bringen mit den Konstanten $r, b \in \mathbb{R}$, für die $r = -GK < 0$ und $b = -\frac{1}{r} \ln\left(\frac{G-N_0}{N_0}\right)$ gilt. Falls zusätzlich $G > 2N_0$ gilt, falls also die Bestandsgrenze größer als das Doppelte der Populationsgröße zum Zeitpunkt 0 ist, folgt $b > 0$.
Aufgabe: Berechnen Sie den Grenzwert der Populationsgröße für $t \to \infty$; überlegen Sie sich vorher, welchen Grenzwert sie erwarten. Zu welchem Zeitpunkt befindet sich die Population im stärksten Wachstum?
Hinweis: Setzen Sie $t = t_0$ in Gleichung (5) ein und lösen Sie sie nach t_0 auf. Den Wert für $N(t_0)$ kennen Sie aus Aufgabenteil h).

Punkte: 2
(1+1)

k) Betrachten Sie nun die Wachstumsfunktion N mit den Werten $G = 10^5$, $N_0 = 53$ und $K = 9,7 \cdot 10^{-6}$.
Aufgabe: Berechnen Sie den Zeitpunkt und die zugehörige Bestandsgröße am Wendepunkt von N, ohne die Funktion zweimal abzuleiten. Wann erreicht die Populationsgröße 90% der Bestandsgrenze?
Hinweis: Verwenden Sie Aufgabenteil h) und j).

Punkte: 2
(1+1)

Zusatzaufgabe: Zeichnen Sie N mit geeigneter Software (z.B. Matlab, Scilab, Maple, Mathematica) und markieren Sie ebenfalls mith Hilfe der Software den Wendepunkt in der Zeichnung.

Punkte: 4

Bakterienwachstum - Mathematische Erläuterungen

Wir wollen den Zusammenhang zwischen der diskreten Darstellung des logistischen Wachstums und der zugehörigen Differentialgleichung erklären. Wie schon in der Einleitung zu Aufgabenteil h) beschrieben, wird bei diesem Modell angenommen, dass die Änderung der Populationsgröße $\Delta N(t) = N(t+h) - N(t)$ während eines Zeitintervalls $\Delta t = (t+h) - t = h$ proportional zu der Populationsgröße $N(t)$ und dem Sättigungsmanko $G - N(t)$ ist:

$$\frac{\Delta N(t)}{\Delta t} = K\, N(t)\big(G - N(t)\big).$$

Bildet man den Grenzwert $h \to 0$, steht auf der linken Seite die Ableitung von N, also das Wachstum:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta N(t)}{\Delta t} = \lim_{h\to 0} \frac{N(t+h) - N(t)}{h} = N'(t).$$

Man erhält die Differentialgleichung

$$N'(t) = K\, N(t)\big(G - N(t)\big).$$

Setzt man dagegen das Zeitintervall $h = 1$ und betrachtet die Gleichung nur zu den diskreten Zeitpunkten $t \in \{0, 1, 2, 3, ...\}$, erhält man

$$N(t+1) - N(t) = K\, N(t)\big(G - N(t)\big) \text{ für } t \in \mathbb{N}.$$

Stellen wir noch die Gleichung um und setzen die Argumente als Index, erhalten wir

$$N_{n+1} = N_n + K\, N_n\big(G - N_n\big) \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$