Die Ableitungsregeln der Differentialrechnung

Satz Die Funktion $f : x \to f(x) = x^n$ besitzt für $n \in \mathbb{Z}$ (sogar für $n \in \mathbb{R}$) die Ableitungsfunktion

$$f' : x \mapsto f'(x) = n \cdot x^{n-1}.$$

Satz Wenn die Funktionen $u : x \mapsto u(x)$ und $v : x \to v(x)$ in $D \subseteq \mathbb{R}$ differenzierbar sind, dann sind es auch die Funktionen

$$\begin{aligned}
f : x \mapsto f(x) &= c \cdot u(x) \quad \text{für } c \in \mathbb{R} && \text{(Faktorfunktion)}\\
s : x \mapsto s(x) &= u(x) \pm v(x) && \text{(Summenfunktion)}\\
p : x \mapsto p(x) &= u(x) \cdot v(x) && \text{(Produktfunktion)}\\
q : x \mapsto q(x) &= \frac{u(x)}{v(x)} \quad \text{für } v(x) \neq 0 && \text{(Quotientenfunktion)}
\end{aligned}$$

Die Ableitungen dieser Funktionen berechnet man mit den Regeln:

$$\begin{aligned}
\left(x^r\right)' &= r \cdot x^{r-1} && \text{(„Potenzregel“)}\\
(c \cdot u(x))' &= c \cdot u'(x) && \text{(Faktorregel)}\\
(u(x) \pm v(x))' &= u'(x) \pm v'(x) && \text{(Summenregel)}\\
(u(x) \cdot v(x))' &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) && \text{(Produktregel)}\\
\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} && \text{(Quotientenregel)}
\end{aligned}$$

Beweis der Produktregel: